Editorial
•UNIMAGDALENA•

FUNDAMENTOS DE

# ELECTROSTÁTICA Y MAGENTOSTÁTICA

PARA INGENIEROS

*Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia*

Beltrán Sánchez, Jesús Ramón

Fundamentos de electrostática y magnetostática para ingenieros / Jesús Ramón Beltrán Sánchez, José Henry Escobar Acosta, Jesús González Acosta. -- 1a. ed. -- Santa Marta : Universidad del Magdalena, 2020.

248 p. -- (Ciencias Naturales. Física)

Incluye índice alfabético. -- Contiene bibliografía.

ISBN 978-958-746-260-9 -- 978-958-746-261-6 (pdf)

1. Electrostática para ingenieros 2. Magnetostática para ingenieros I. Escobar Acosta, José Henry II. González Acosta, Jesús III. Título IV. Serie

CDD: 537.2 ed. 23
CO-BoBN–

Primera edición, marzo de 2020

© UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA

Editorial Unimagdalena
Carrera 32 No. 22 - 08
Edificio Mar Caribe, pimer piso
(57 - 5) 4381000 Ext. 1888
Santa Marta D.T.C.H. - Colombia
editorial@unimagdalena.edu.co
https://editorial.unimagdalena.edu.co

Colección Ciencias Naturales, serie: Física

Rector: Pablo Vera Salazar
Vicerrector de Investigación: Ernesto Amarú Galvis Lista
Coordinador de Publicaciones y Fomento Editorial: Jorge Enrique Elías-Caro

Diagramación: Jesús Ramón Beltrán Sánchez
Asesoría en diagramación: Luis Felipe Marquez Lora
Diseño de portada: Andrés Felipe Moreno Toro
Corrección de estilo: Juan Mikan

Santa Marta, Colombia, 2020

ISBN: 978-958-746-260-9 (impreso)
ISBN: 978-958-746-261-6 (pdf)

DOI: 10.21676/9789587462609

Impreso y hecho en Colombia - Printed and made in Colombia
Xpress Estudio Gráfico y Digital S.A.S. - Xpress Kimpres (Bogotá)

El contenido de esta obra está protegido por las leyes y tratados internacionales en materia de Derecho de Autor. Queda prohibida su reproducción total o parcial por cualquier medio impreso o digital conocido o por conocer. Queda prohibida la comunicación pública por cualquier medio, inclusive a través de redes digitales, sin contar con la previa y expresa autorización de la Universidad del Magdalena.

Las opiniones expresadas en esta obra son responsabilidad del autor y no compromete al pensamiento institucional de la Universidad del Magdalena, ni genera responsabilidad frente a terceros.

# FUNDAMENTOS DE ELECTROSTÁTICA Y MAGENTOSTÁTICA PARA INGENIEROS

**Jesús Ramón Beltrán Sánchez**
**José Henry Escobar Acosta**
**Jesús González Acosta**

**Colección Ciencias Naturales**
**Serie: Física**

# Índice general


**Prólogo** . . . . . 11

**1 Vectores y campos** . . . . . 13

**Introducción** 13

**1.1 Vectores** 13

**1.2 Igualdad de vectores** 15

**1.3 Operaciones entre vectores** 15

1.3.1 Suma y diferencia entre vectores . . . . . 15
1.3.2 Producto de un escalar por un vector . . . . . 16
1.3.3 Producto escalar o punto . . . . . 16
1.3.4 Producto vectorial . . . . . 17
1.3.5 Expansión de Laplace . . . . . 18
1.3.6 Triple producto escalar . . . . . 20
1.3.7 Triple producto vectorial . . . . . 21
1.3.8 Componentes de un vector . . . . . 21

**1.4 Campos** 22

1.4.1 Campo escalar . . . . . 22
1.4.2 Campo vectorial . . . . . 23

**1.5 Sistemas de coordenadas ortogonales** 23

1.5.1 Coordenadas rectangulares . . . . . 23
1.5.2 Coordenadas cilíndricas . . . . . 31
1.5.3 Coordenadas esféricas . . . . . 39

**2 Cálculo vectorial** . . . . . 47

**Introducción** 47

**2.1 Gradiente de un campo escalar** 47

**2.2 Divergencia de un campo vectorial** 51

2.2.1 Teorema de la divergencia . . . . . 54

**2.3 Rotacional de un campo vectorial** **56**
2.3.1 Teorema de Stokes . . . . . 60
**2.4 Laplaciano de un campo escalar** **61**
2.4.1 Clasificación de los campos vectoriales . . . . . 63

**3 Electrostática . . . . . 67**
**Introducción** **67**
**3.1 Carga eléctrica** **67**
**3.2 Ley de Coulomb** **70**
**3.3 Campo electrostático** **76**
**3.4 Campos electrostáticos debidos a distribuciones continuas de carga** **81**
**3.5 Ley de Gauss** **91**
**3.6 Rotacional de $\boldsymbol{E}$** **91**
**3.7 Densidad de flujo eléctrico** **98**
**3.8 Potencial eléctrico** **100**
3.8.1 Relación entre $\boldsymbol{E}$ y $V$ . . . . . 103
**3.9 Energía potencial eléctrica** **110**
3.9.1 Energía electrostática en función de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{D}$ . . . . . 111

**4 Electrostática en medios materiales . . . . . 117**
**Introducción** **117**
**4.1 Propiedades eléctricas de los materiales** **117**
**4.2 Corrientes de conducción y convección** **118**
**4.3 Densidades de corriente de convección y conducción** **119**
4.3.1 Forma macroscópica de la ley de Ohm . . . . . 124
4.3.2 Ley de Joule . . . . . 129
**4.4 Ecuación de continuidad y tiempo de relajación** **132**
**4.5 Polarización en dieléctricos** **135**
**4.6 Condiciones en la frontera para campos electrostáticos** **143**
4.6.1 Dieléctrico-dieléctrico . . . . . 144
4.6.2 Dieléctrico-conductor . . . . . 149
4.6.3 Conductor-conductor . . . . . 151
4.6.4 Conductor-espacio libre (vacío) . . . . . 152
**4.7 Problemas electrostáticos con valores de frontera** **155**
4.7.1 Ecuaciones de Poisson y Laplace . . . . . 155
4.7.2 Teorema de unicidad . . . . . 156

4.7.3 Aplicación de las ecuaciones de Poisson y Laplace . . . . . 157
**4.8 Resistencia y capacitancia 165**

**5 Magnetostática . . . . . 171**
**Introducción 171**
**5.1 Fuerza magnética y fuerza electromagnética 172**
**5.2 Ecuaciones fundamentales de la magnetostática en el espacio libre 176**
**5.3 Potencial magnético vector 184**
**5.4 Ley de Biot-Savart 188**
**5.5 Fuerza magnética sobre un conductor que transporta una corriente 195**
**5.6 Fuerza magnética entre dos circuitos 196**
**5.7 Momento de torsión sobre una espira que lleva una corriente 200**
5.7.1 Campo magnético paralelo al plano de la espira . . . . . 201
5.7.2 Campo magnético perpendicular al plano de la espira . . . . . 203
**5.8 Dipolo magnético 205**
**5.9 Inductancia e inductores 206**
**5.10 Energía magnética 211**
5.10.1 Energía magnética en función de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ . . . . . 212

**6 Magnetostática en medios materiales . . . . . 217**
**Introducción 217**
**6.1 Tipos de materiales magnéticos 217**
**6.2 Magnetización de materiales 220**
6.2.1 Momento angular orbital y de espín . . . . . 220
**6.3 Intensidad de campo magnético y permeabilidad relativa 222**
**6.4 Histéresis de los materiales ferromagnéticos 225**
**6.5 Condiciones en la frontera magnetostática 227**
**Bibliografía 231**

**A Convención de suma de Einstein . . . . . 235**
**A.1 Índices repetidos 235**
**A.2 Índices libres y mudos 235**
**A.3 Doble suma 237**
**A.4 Sustitución 237**

A.5 Delta Kronecker 237

B Fórmulas vectoriales . . . . . 239

B.1 Identidades del álgebra vectorial 239

B.2 Identidades del análisis vectorial 239

B.3 Identidades especiales 240

C Función delta de Dirac . . . . . 243

C.1 Función delta de Dirac 243

C.2 Propiedades 243

Índice alfabético . . . . . 243

# Prólogo

Para los docentes de Física de la Universidad del Magdalena que contribuimos con la labor misional de la institución de formar mejores ciudadanos y profesionales competentes, es muy satisfactorio aportarles a nuestros estudiantes recursos de aprendizaje y material de estudio, como el que hoy ponemos a su consideración, que respondan a sus necesidades.

El esfuerzo por sistematizar y organizar muchos años de experiencia y trabajo interactivo con alumnos de la Facultad de Ingeniería, especialmente los de Ingeniería Electrónica, se convierte en nuestra contribución desde el ejercicio de la docencia para apoyar el trabajo de profesores de la asignatura electrostática y magnetostática, tanto a nivel profesional como posgradual.

El propósito fundamental de este libro es brindar a estudiantes que se inician en el estudio de la física en los programas de ingeniería un compendio de definiciones y teoría necesaria en el campo de la electrostática y magnetostática, que les ayude a reducir el tiempo de transición entre la conceptualización de los contenidos que proporciona el profesor (enseñanza pasiva) y su aplicación a algunas situaciones reales de manera que puedan clarificar, ordenar y asimilar los conceptos (enseñanza activa). En el libro se les da un tratamiento amplio y detallado a las demostraciones y deducciones de ecuaciones. También se le ha dado especial importancia a la selección de los problemas y se han explicado con mucho detalle las soluciones.

La temática desarrollada en este libro se ha construido con el fin de suplir las necesidades de los estudiantes y profesores de encontrar información en un solo sitio, ya que la bibliografía sobre el tema de la que hoy se dispone está dispersa en libros con diferentes enfoques, elaborados para otras necesidades profesionales. Por esa razón, hemos tenido en cuenta los puntos de vista de profesores del área y de estudiantes de la asignatura, así como las dificultades presentadas en el aula de clases durante más de diez años de impartir esta asignatura.

La metodología propuesta en esta obra permite al lector seguir un eje organizador de conocimientos básicos de mecánica clásica y cálculo. Cada capítulo del libro inicia con una breve introducción que orienta al estudiante mediante actividades de autoevaluación y repaso que comprendan la necesidad del tema abordado en la construcción de su conocimiento.

El libro consta de seis capítulos, donde presenta los conceptos de la electrostática y magnetostática de forma clara y concisa. Los dos primeros están dedicados a brindar a los estudiantes las herramientas matemáticas necesarias para abordar la solución de problemas relacionados con la electrostática y la

magnetostática, familiarizándolos de esta forma con el álgebra y el cálculo vectorial. Los capítulos 3 y 4, están dedicados a la electrostática en el espacio libre y en medios materiales, y los capítulos 5 y 6, se estudian los campos magnéticos estático tanto en el espacio libre, como en medios materiales, respectivamente. Al final de cada sección se incluyen una serie de problemas resueltos y propuestos relacionados con los temas tratados.

Los autores agradecen la valiosa colaboración del profesor José García Díaz por la minuciosa revisión de manuscrito y a la Universidad de Magdalena por su apoyo para la elaboración de este libro.

Los comentarios, sugerencias y correcciones siempre serán bienvenidos.

Santa Marta, 2020. Los autores

# 1 Vectores y campos

## Introducción

Las magnitudes vectoriales tales como vectores y campos vectoriales desempeñan un rol importante en la formulación de los fenómenos electromagnéticos. Es por ello que iniciaremos introduciendo algunas de las reglas de operación y manipulación de estas cantidades. Además, como la cantidad fuente de estos fenómenos es la carga eléctrica, que puede estar en reposo o en movimiento con respecto a un observador en el espacio tridimensional, los estudiantes deben estar en condiciones de elegir un sistema de coordenadas apropiado para resolver y presentar resultados de los problemas relacionados con el tema. En este capítulo se estudiarán los conceptos básicos del álgebra vectorial y el cálculo vectorial y se analizarán los sistemas de coordenadas ortogonales más frecuentes: rectangulares (o cartesianos), cilíndricos y esféricos.

Las magnitudes físicas se pueden clasificar en dos grandes categorías: *tensores* y *espinores*. Los tensores son entes matemáticos que permiten escribir las ecuaciones físicas de manera compacta y de forma covariante o contravariante. Los escalares y los vectores son un caso especial de tensores de rango $n$, cuya especificación en cualquier sistema de coordenadas requiere de $3^n$ números, llamados las componentes del tensor. En este esquema los escalares son tensores de rango 0, es decir, $3^0 = 1$ componente, y los vectores son tensores de rango 1, esto es, $3^1 = 3$ componentes. Los espinores, por otra parte son, campos vectoriales complejos; por ejemplo, un vector cuyas componentes sean complejas es un espinor.

## 1.1 Vectores

Geométricamente, un vector se representa mediante un segmento de recta dirigido con uno de sus extremos terminado en una flecha. La longitud del segmento es proporcional a la magnitud del vector, y su dirección es igual al ángulo medido en sentido antihorario con respecto a una línea imaginaria que pasa por su origen. En la figura 1.1 se muestran diferentes orientaciones del vector $\boldsymbol{A}$

Matemáticamente, un vector puede ser representado de maneras diferentes. Una representación adecuada en un espacio vectorial real o complejo de dimensión $N$ es un conjunto de $N-upla$ ordenadas de números reales o complejos, o un vector fila de componentes, $(a_1, a_2, \cdots, a_N)$, a lo

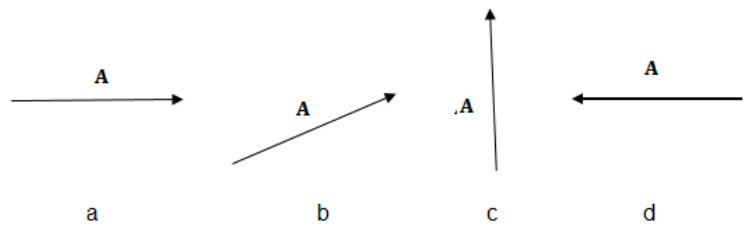


**Figura 1.1:** Diferentes orientaciones del vector $\boldsymbol{A}$. a) $0^0$, b) $30^0$, c) $90^0$, d) $180^0$

largo de los $N$ ejes de coordenadas que abarcan todo el espacio vectorial. Sin embargo, existen muchas $N-uplas$ ordenadas de números que no representan un vector, es decir, no satisfacen las propiedades de transformación de un vector. Matemáticamente un vector se puede escribir como la suma de sus $N$-componentes, esto es

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{N} A_i \boldsymbol{u}_i \stackrel{def}{\equiv} A_i \boldsymbol{u}_i \tag{1.1}$$

En la ecuación (1.1) se ha hecho uso del convenio de suma de Einstein, que establece que si en una expresión aparece un índice que se repite en un término, implica suma en el rango del índice en cuestión. El símbolo $\stackrel{def}{\equiv}$, que significa "por definición", y $\boldsymbol{u}_i$ son vectores unitarios (vectores de módulo la unidad) a lo largo de los ejes coordenados. Se acostumbra a representar un vector por una letra minúscula o mayúscula en negrilla.

El vector más básico es el radio vector o vector posición, que es el vector que va desde el origen de un sistema de coordenadas hasta el punto de interés (ver figura 1.2).

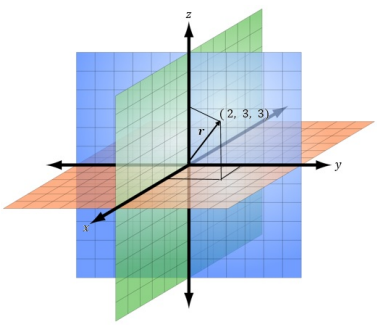


**Figura 1.2:** Vector posición del punto P

Su $N-upla$ simplemente enumera las coordenadas del punto en dicho sistema de coordenadas. En este sentido, un radio vector especifica la posición del punto. En el espacio euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, tenemos que $N=3$, y el radio vector puede ser representado por la tripleta $(x_1, x_2, x_3)$ o $(x_i)$, con $i = 1,2,3$. Las $x_i$ son las componentes a lo largo de los vectores base unitarios $\boldsymbol{u}_i$. Por lo tanto, una representación del radio vector en este espacio es

$$\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{u}_i = x_1 \boldsymbol{u}_1 + x_2 \boldsymbol{u}_2 + x_3 \boldsymbol{u}_3 = x\boldsymbol{u}_x + y\boldsymbol{u}_y + z\boldsymbol{u}_z \tag{1.2}$$

## 1.2 Igualdad de vectores

Dos vectores son iguales si tienen igual magnitud e idénticos vectores unitarios, esto es, si $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{u}_i$ y $\boldsymbol{B} = B_i\boldsymbol{u}_i$, entonces $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow$ los $A_i = B_i$. La igualdad de vectores, sin embargo, no implica que sean idénticos; en coordenadas rectangulares, dos vectores paralelos desplazados de igual magnitud y que tienen la misma dirección son iguales, pero idénticos solo si están uno encima del otro.

## 1.3 Operaciones entre vectores

A partir de la definición de vector dada en la sección anterior, se puede proceder a definir las reglas de la aritmética, y del álgebra vectorial (más adelante se procederá con las del cálculo vectorial). Algunas de estas reglas de operación son similares a las operaciones entre escalares, sin embargo, la mayoría de ellas serán totalmente diferentes.

### 1.3.1 Suma y diferencia entre vectores

La suma de dos vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ es otro vector. Gráficamente, la suma de dos vectores se obtiene por el método del paralelogramo, según el cual vector suma es la diagonal del paralelogramo formado por los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, o por la regla del triángulo (cabeza-cola), en cuyo caso el vector suma es el vector que va desde la cola de $\boldsymbol{A}$ hasta la cabeza de $\boldsymbol{B}$ (véase figura 1.3).

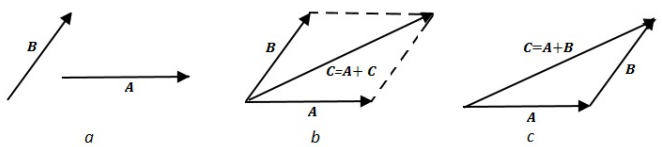


**Figura 1.3:** Suma de vectores: a) vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, b) método de paralelogramo y c) método del triángulo

La diferencia entre los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ es la suma de $\boldsymbol{A}$ con el negativo de $\boldsymbol{B}$, es decir, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$, tal como se ilustra en la figura 1.4.

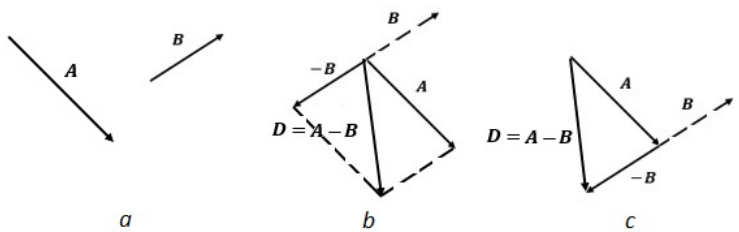


**Figura 1.4:** Diferencia de vectores: a) vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, b) método de paralelogramo y c) método del triángulo

**Definición 1.1**

Dados los vectores $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{u}_i$ y $\boldsymbol{B} = B_i\boldsymbol{u}_i$, entonces

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A + B)_i\boldsymbol{u}_i \tag{1.3}$$

y

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A - B)_i\boldsymbol{u}_i \tag{1.4}$$