





# **Cálculo integral aplicado a las ciencias empresariales y económicas**



# **Cálculo integral aplicado a las ciencias empresariales y económicas**

**Edgardo Escorcía Caballero  
Eric Hernández Sastoque  
José Barros Troncoso**

Colección: Ciencias Naturales  
Serie: Matemáticas

Escorcia Caballero, Edgardo  
Cálculo integral aplicado a las ciencias empresariales y económicas / Edgardo Escorcia Caballero, Eric Hernández Sastoque, José Barros Troncoso. -- 1a. ed. -- Santa Marta : Universidad del Magdalena, 2020.  
220 p. -- (Ciencias Naturales. Matemática)

Incluye datos de los autores.

ISBN 978-958-746-323-1 (impreso) -- 978-958-746-324-8 (pdf) -- 978-958-746-325-5 (epub)

1. Cálculo integral - Enseñanza superior 2. Cálculo integral - Problemas, ejercicios, etc. I. Hernández Sastoque, Eric II. Barros Troncoso, José III. Título IV. Serie

CDD: 515.43 ed. 23  
CO-BoBN- a1060885

Primera edición, noviembre de 2020

© UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA

Editorial Unimagdalena  
Carrera 32 No. 22 - 08  
Edificio Mar Caribe, primer piso  
(57 - 5) 4381000 Ext. 1888  
Santa Marta D.T.C.H. - Colombia  
editorial@unimagdalena.edu.co  
<https://editorial.unimagdalena.edu.co/>

Colección: Ciencias Naturales, serie: Matemáticas

Rector: Pablo Vera Salazar  
Vicerrector de Investigación: Ernesto Amarú Galvis Lista  
Coordinador de Publicaciones y Fomento Editorial: Jorge Enrique Elías-Caro

Diseño editorial: Luis Felipe Márquez Lora  
Diagramación: Xpress Estudio Gráfico y Digital  
Diseño de portada: Andrés Felipe Moreno Toro  
Corrección de estilo: Juan Mikan

Santa Marta, Colombia, 2020

ISBN: 978-958-746-323-1 (impreso)  
ISBN: 978-958-746-324-8 (pdf)  
ISBN: 978-958-746-325-5 (epub)

DOI: 10.21676/9789587463231

Impreso y hecho en Colombia - Printed and made in Colombia  
Xpress Estudio Gráfico y Digital S.A.S. - Xpress Kimpres (Bogotá)

El contenido de esta obra está protegido por las leyes y tratados internacionales en materia de Derecho de Autor. Queda prohibida su reproducción total o parcial por cualquier medio impreso o digital conocido o por conocer. Queda prohibida la comunicación pública por cualquier medio, inclusive a través de redes digitales, sin contar con la previa y expresa autorización de la Universidad del Magdalena.

Las opiniones expresadas en esta obra son responsabilidad de los autores y no compromete al pensamiento institucional de la Universidad del Magdalena, ni genera responsabilidad frente a terceros.

# Contenido

<b>Carácter didáctico del libro</b>	<b>17</b>
Elementos conceptuales y procedimentales .....	17
Ayudas pedagógicas .....	17
<b>Prólogo</b>	<b>21</b>
<b>Capítulo 1. Integral indefinida</b>	<b>23</b>
Introducción .....	23
Antiderivada .....	23
Definición 1. Antiderivada .....	23
Teorema 1. ....	24
Integral indefinida .....	25
Definición 2. Integral indefinida .....	25
Propiedades de la integral indefinida .....	27
Fórmulas básicas de integración .....	27
Aplicaciones de la integral indefinida .....	33
Actividad 1.1 .....	37
Preguntas sobre teoría .....	37
Ejercicios .....	38
Uso de software matemático .....	39
Problemas de aplicación .....	39
<b>Capítulo 2. Técnicas de integración</b>	<b>41</b>
Introducción .....	41
Integración por sustitución de la variable (cambio de variable) ....	41
Actividad 2.1 .....	56

Preguntas sobre teoría .....	56
Ejercicios .....	57
Uso de software matemático .....	57
Problemas de aplicación .....	58
Integración por partes .....	58
Fórmula de integración por partes .....	59
Integración tabular .....	67
Actividad 2.2 .....	68
Preguntas sobre teoría .....	68
Ejercicios .....	69
Uso de software matemático .....	69
Problemas de aplicación .....	69
Integración mediante fracciones parciales .....	70
Definición 1. Descomposición en fracciones parciales .....	73
Integración de funciones racionales por fracciones parciales cuando el denominador tiene solo factores lineales distintos ...	74
Integración de funciones racionales por fracciones parciales cuando el denominador tiene factores lineales repetidos .....	80
Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales cuando el denominador tiene factores cuadráticos irreducibles y ninguno se repite .....	85
Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales cuando el denominador tiene factores cuadráticos irreducibles y algunos se repiten .....	87
Actividad 2.3 .....	88
Ejercicios .....	88
Uso de software matemático .....	89
Problemas de aplicación .....	90
<b>Capítulo 3. La integral definida</b>	<b>91</b>
Introducción .....	91
La integral definida como área .....	91
Área de una región plana como un límite de suma de Riemann	96

La integral definida como límite de sumas de Riemann .....	98
Propiedades de la integral definida .....	102
Actividad 3.1 .....	106
Definición de integral definida .....	106
Uso de software matemático .....	106
Integral definida como área .....	106
Propiedades de la integral definida .....	107
Teorema fundamental del cálculo .....	109
Actividad 3.2 .....	114
Ejercicios .....	114
Uso de software matemático .....	115
Área bajo una curva .....	115
Área de una región acotada por la gráfica de $y = f(x) \geq 0$ , las rectas $x = a$ , $x = b$ y el eje $x$ .....	115
Variación total como aplicación de la integral definida .....	117
Actividad 3.3 .....	119
Ejercicios .....	119
Área de una región acotada por la gráfica de $y = f(x) \leq 0$ , las rectas $x = a$ , $x = b$ y el eje $x$ .....	123
Actividad 3.4 .....	128
Ejercicios .....	128
Uso de software matemático .....	130
Área de regiones entre curvas .....	130
Aplicaciones en la administración y la economía .....	135
Actividad 3.5 .....	153
Ejercicios .....	153
Problemas de aplicación .....	154
Valor promedio de una función .....	157
Interpretación geométrica de $f(x)$ .....	157
Actividad 3.6 .....	161
Ejercicios .....	161

Problemas de aplicación .....	161
Integrales impropias .....	162
Integrales impropias tipo 1: intervalos no limitados .....	162
Actividad 3.7 .....	171
Ejercicios .....	171
Problemas de aplicación .....	172
Integrales dobles .....	172
Funciones de dos variables .....	173
Integrales definidas de funciones de dos variables .....	173
Valor promedio de una función de dos variables .....	176
Actividad 3.8 .....	177
Ejercicios .....	177
Problemas de aplicación .....	178
<b>Capítulo 4. Ecuaciones diferenciales</b> .....	<b>179</b>
Introducción .....	179
Nociones sobre ecuaciones diferenciales .....	179
Definición 1. Ecuación diferencial .....	179
Definición 2. Ecuación diferencial lineal .....	180
Definición 3. Solución de una ecuación diferencial .....	180
Ecuaciones diferenciales simples .....	180
Actividad 4.1 .....	183
Ejercicios .....	183
Problemas de aplicación .....	183
Ecuaciones diferenciales de variables separables .....	184
Ecuaciones diferenciales reducibles a variables separables .....	195
Actividad 4.2 .....	200
Ejercicios .....	200
Problemas de aplicación .....	202
<b>Evaluación tipo Saber Pro</b> .....	<b>203</b>
<b>Apéndices</b> .....	<b>211</b>

Apéndice A. Propiedades y operaciones con números reales .....	211
Propiedades de los números reales .....	211
Operaciones con números reales .....	211
Apéndice B. Propiedades de la potenciación y la radicación .....	211
Apéndice C. Algunos productos notables .....	211
Apéndice D. Algunas fórmulas de factorización .....	212
Apéndice E. Propiedades de logaritmos .....	212
Apéndice F. Fórmulas de derivación .....	212
Reglas de derivación .....	212
Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas .....	213
Derivada de las funciones trigonométricas .....	213
Apéndice G. Propiedades de la sumatoria .....	213
Ejemplo .....	214
Propiedades .....	214

## Índice de tablas

*Tabla 1.* it Funciones interna y externa en una función compuesta . . . .42

## Índice de figuras

<b>Figura 1.</b> Polígonos subdivididos en regiones triangulares .....	92
<b>Figura 2.</b> Región circular con un polígono inscrito y circunscrito .....	92
<b>Figura 3.</b> Región acotada por la gráfica de $f(x) = 2$ y el eje $x$ en $[1, 4]$ .....	93
<b>Figura 4.</b> Región acotada por la gráfica de $f(x) = x$ y el eje $x$ en $[0, 2]$ .....	93
<b>Figura 5.</b> Región acotada por la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ .....	94
<b>Figura 6.</b> Rectángulos inscritos en la región acotada por la gráfica de $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ .....	95
<b>Figura 7.</b> Rectángulos circunscritos en la región acotada por la gráfica de $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ .....	95
<b>Figura 8.</b> Aproximación del área de una región acotada por la gráfica de $f(x)$ y el eje $x$ en $[a, b]$ .....	97
<b>Figura 9.</b> Área debajo de la gráfica de $f(t)$ de $a$ a $x$ .....	110
<b>Figura 10.</b> Área de la región acotada por la curva $y = f(x) \geq 0$ y el eje $x$ en $[a, b]$ .....	116
<b>Figura 11.</b> Área acotada por la curva $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ y el eje $x$ en $[1, 4]$ .....	117
<b>Figura 12.</b> Área de la región acotada por la curva $y = f(x) \leq 0$ y el eje $x$ en $[a, b]$ .....	123
<b>Figura 13.</b> Área acotada por la curva $y = x^2 - 4$ y el eje $x$ en $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ .....	124
<b>Figura 14.</b> Área de la región acotada por la curva $f(x) \geq 0$ , $f(x) \leq 0$ y el eje $x$ en $[a, b]$ .....	125
<b>Figura 15.</b> Área acotada por la curva $y = x^2 - 9$ y el eje $x$ en $[0, 4]$ .....	126

<b>Figura 16.</b> Área acotada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje $x$ en $[-1, 5]$ .....	128
<b>Figura 17.</b> Área acotada entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en $[a, b]$ .....	131
<b>Figura 18.</b> Área acotada por las curvas $y = x$ y $y = x^2 + 4$ en $[0, 3]$ .	132
<b>Figura 19.</b> Área acotada por las curvas $y = 3x$ y $y = x^3 + 2x^2$ .....	133
<b>Figura 20.</b> Área acotada por las curvas $y = 3x^2$ y $y = x^4 + 2x^3$ .....	134
<b>Figura 21.</b> Curvas de demanda $f(x)$ y de oferta $g(x)$ .....	136
<b>Figura 22.</b> Área entre la curva de demanda $f(x)$ y la recta $p_0$ .....	137
<b>Figura 23.</b> Área entre la curva de oferta $g(x)$ y la recta $p_0$ .....	138
<b>Figura 24.</b> Utilidad total $P(t)$ .....	145
<b>Figura 25.</b> Interpretación geométrica de $f(x)(b - a)$ .....	158
<b>Figura 26.</b> Región no limitada entre la curva de $f(x) = e^{-x}$ y el eje $x$ para $x \geq 0$ .....	162
<b>Figura 27.</b> Región definida para $e^{-x}$ entre $0$ y $z$ .....	163
<b>Figura 28.</b> Integral impropia $\int_a^\infty f(x)dx$ como límite de $\int_a^z f(x)dx$ cuando $z \rightarrow \infty$ .....	164
<b>Figura 29.</b> Integral impropia $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ como límite de $\int_z^a f(x)dx$ cuando $z \rightarrow -\infty$ .....	164
<b>Figura 30.</b> Integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ como límite de $\int_1^z \frac{1}{x^2}dx$ cuando $z \rightarrow \infty$ .....	165
<b>Figura 31.</b> Integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ como límite de $\int_1^z \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ cuando $z \rightarrow \infty$ .....	166
<b>Figura 32.</b> $f(x) = \frac{1}{x^2}$ se aproxima mucho más rápido al eje $x$ que $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .....	167

**Figura 33.** Integral impropia  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x-5} dx$  como límite de  $\int_z^0 \frac{1}{2x-5} dx$  cuando  $z \rightarrow -\infty$  ..... 169

**Figura 34.** Integral impropia  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$  como la suma de  $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx$  y  $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$  ..... 170

**Figura 35.** Región en el plano  $xy$  tales que  $3 \leq x \leq 4$  y  $0 \leq y \leq 3$  .. 174

**Figura 36.** Región en el plano  $xy$  tales que  $x^3 \leq y \leq x^2$  y  $0 \leq x \leq 1$  176