Introducción al álgebra de matrices y algunos temas especiales

Un libro elaborado para dominar las matrices

Eduardo enrique echeverría rumié

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Atlántico
Especialista en Matemáticas Avanzadas de la Universidad Nacional de Colombia
Docente de la Universidad del Magdalena desde Marzo de 1976

Introducción al álgegra de matrices y algunos temas especiales

Edición: Primera - Noviembre de 2009
ISBN: 978-958-746-005-6
Autor: Eduardo Enrique Echeverria Rumié
Diseño y Diagramación: Luis Felipe Marquez, Julio C. Valle N.
Diseño carátula: Andrés Caiaffa Vidal
Ciudad: Santa Marta, D.T.C.H. - Colombia

Dirección de publicaciones y propiedad intelectual

EDITORIAL
UNIMAGDALENA

UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA
Rector: Ruthber Escorcia Cabellera
Vicerrector de Investigación: Jóse Henry Escobar Acosta
Decano Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas: Jaime Morón Cárdenas
Coordinador de publicaciones y propiedad intelectual (e): Raúl Sarabia-Gómez

ÍNDICE

PRÓLOGO

Hasta hace unos cincuenta años atrás, las matrices sólo se estudiaban en postgrados y en la carrera de Matemáticas y Física. Pero ya la situación ha cambiado totalmente y, por lo tanto, presentamos el texto titulado "Introducción al Álgebra de Matrices y algunos temas especiales"; a consideración de los profesores y estudiantes.

Sabemos que el estudio de las matrices es de vital importancia en los siguientes programas: Economía, Administración de Empresas, Contaduría, Negocios Internacionales y en Ingeniería de Sistemas, Mecánica, Industrial, Eléctrica y Electrónica.

Siempre nos hemos preocupado, en calidad de docentes, por enseñar las matrices como una herramienta muy importante para que el estudiante las maneje y utilice en las diferentes asignaturas de los programas antes mencionados.

A pesar del desarrollo de las computadoras electrónicas y de las calculadoras inteligentes en la solución rápida de muchos temas relacionados con las matrices, es necesario que el estudiante sepa cómo se obtienen esos datos que posteriormente, con conocimientos de causas, ya los puede aplicar en la computadora.

También nos hemos preocupado por presentar una serie de ejercicios resueltos y otros por resolver que no aparecen en los textos de matrices que hemos consultado. Con estos ejercicios, pretendemos que el lector aplique la teoría y se desarrolle cognitivamente.

Para finalizar, queremos formar matricialmente un estudiante analítico con la capacidad de manejar en forma correcta una información y clasificar factores para interrelacionarlos con los componentes de un problema.

Con todo lo anterior mencionado, se desarrollarán de una manera introductoria el Álgebra de Matrices y algunos temas especiales sin perder la formalidad, esto es, presentar teoremas, algunos con su respectiva demostración y de otros sólo su enunciado, ya que el texto es dirigido a estudiantes de pre-grado de las carreras anotadas. Esto, lo afirmamos porque en estos programas las bases matemáticas de álgebra lineal no son suficientes para desarrollar en forma estricta algunos temas relacionados con las matrices.

RESEÑA HISTÓRICA

Los comienzos de las matrices y los determinantes datan del siglo II a. de J.C. aunque hay indicios desde el siglo IV a.de C. Sin embargo, no fue hasta fines del siglo XVII que las ideas reaparecieron y se desarrollaron con fuerza. En Babilonia se estudiaron problemas que involucraban a ecuaciones lineales simultáneas y algunos de éstos son conservados en tabletas de arcilla que permanecieron en el tiempo.

Los chinos, entre los años 200 y 100 a. de C, estuvieron mucho más cerca de las matrices que los babilonios. Verdaderamente, es justo decir que el texto "Nueve Capítulos de Arte Matemático", escrito durante la Dinastía Han, da el primer ejemplo conocido sobre métodos matriciales. Por ejemplo:

"Hay tres tipos de cereales, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de cereal son contenidas en un fardo de cada tipo?". La solución que realizaron es muy parecida a la que hoy día se conoce como Eliminación Gaussiana.

Cardan, en "Ars Magna" (1545), da una regla para resolver de dos ecuaciones lineales que llama regla de modo. Resulta que esta regla corresponde en esencia a nuestra conocida Regla de Cramer para la solución de un sistema 2x2. Aunque Cardan daba aún el paso final, no alcanzó la definición de determinante, pero ahora podemos ver que su método conducía a la definición.

La idea de determinante apareció en Japón y Europa al mismo tiempo, aunque Seki, en Japón, lo publicó primero.

En 1683, Seki escribía: "Métodos de Resolución de problemas Disimulados" que contiene métodos matriciales escritos exactamente como en las tablas del método chino descrito con anterioridad. Sin tener alguna palabra que correspondiera a "determinante", Seki los introdujo y dio métodos generales para calcularlos basados en ejemplos. Usando sus "determinantes" Seki fue capaz de encontrar determinantes de matrices de orden 2x2, 3x3, 4x4 y 5x5 y los aplicó para resolver ecuaciones, pero no sistemas de ecuaciones lineales. Más extraordinario aún es que la aparición del primer determinante en Europa coincidía con el mismo año 1683.

Por los años de 1730, Maclaurin escribió: "Tratados de álgebra" el cual no fue publicado sino hasta 1748, dos años después de su muerte. Este tratado contiene los primeros resultados publicados sobre determinantes probando la regla de Cramer para sistemas de 2x2 y 3x3 e indicando cómo trabajar para sistemas de 4x4. Cramer daba la regla general para sistema de nxn en: “Introducción al análisis de curvas algebraicas” (1750). Esto surgió motivado por encontrar la ecuación de una curva plana, pasando a través de un número dado de puntos. La regla aparece en un apéndice del documento, pero la prueba no.

El término “Determinante” fue introducido por primera vez por Gauss en “Disquisiciones Aritméticas” (1801) mientras se discutían formas cuadráticas. Gauss usó este término porque el determinante determina las propiedades de la forma cuadrática. Sin embargo, este concepto de determinante no era el mismo que conocemos ahora.

Fue Cauchy en 1812 quien usó el término “Determinante” en el sentido moderno. El trabajo realizado por Cauchy es el más completo de las primeras investigaciones sobre determinantes. Él desaprobaba los primeros resultados y daba nuevos, propios sobre Menores.

En este escrito de 1812, por primera vez fue probada la multiplicación de determinantes, aunque en la misma reunión del instituto de Francia, Binet lee un escrito que contenía la prueba del teorema de la multiplicación pero que fue menos satisfactoria que la realizada por Cauchy.

Jacobi publicó tres tratados sobre determinantes en 1841, esto fue de gran importancia, ya que por primera vez la definición de determinante fue hecha en forma algorítmica y las entradas de los determinantes no fueron especificadas. Así, sus resultados fueron aplicados de igual manera bien a casos donde las entradas eran números o ecuaciones. Estos tres escritos de Jacobi hicieron la idea de determinante ampliamente conocido.

Cayley también publicó en 1841 la primera contribución inglesa a la teoría de determinantes. En este escrito, usó dos líneas verticales en ambos lados del arreglo para denotar el determinante, una notación que ahora es común.

El primero en usar el término “Matriz” fue Sylvester en 1850. Sylvester definió matriz como un arreglo rectangular de términos y vio cómo algunas matrices contenían dentro de ellas varios determinantes representados como arreglos cuadrados. Después de dejar América, Sylvester volvió a Inglaterra en 1851, y se formó como abogado. Más tarde junto a Cayley, un abogado como él, compartió sus intereses matemáticos. Cayley rápidamente vio el significado del concepto de matriz y en 1853 había publicado una nota dando, por primera vez, la inversa de una matriz.

Cayley, en 1858, publicó: “Memorias sobre la teoría de matrices” que contiene la primera definición abstracta de matriz. Cayley muestra que los arreglos de coeficiente estudiados tempranamente para formas cuadráticas y para transformaciones lineales son casos especiales de su concepto general. Daba una definición algebraica sobre adición de matrices, multiplicación, multiplicación por un escalar y matriz inversa. Él presentaba una construcción explícita de la inversa de una matriz en términos del determinante. Cayley también probó que, en el caso de matrices de orden (2 x 2), la matriz satisface su ecuación característica propia. Él declaraba que había comprobado el resultado para matrices de orden (3 x 3), indicando su prueba, pero dice:

"Yo no tengo la condición necesaria para llevar adelante el trabajo de probar formalmente el teorema para el caso general de una matriz de cualquier grado."

En 1870, la forma canónica de Jordan aparece en su "Tratado sobre sustituciones y ecuaciones algebraicas" . Aparece en el contexto de una forma canónica para sustituciones lineales sobre un campo finito de orden primo.

Una definición axiomática de determinante fue usado por Weierstrass en sus clases y, después de fallecido, fue publicado en 1903 en la nota "Teoría de determinantes".

En el mismo año también fueron publicados los apuntes de Kronecker sobre determinantes, nuevamente después de su muerte. Con estas dos publicaciones, la teoría moderna de determinantes estaba desarrollada, pero la teoría de matrices tomaba un poco más de tiempo para convertirse en una teoría completamente aceptada.

Un importante texto que abre un espacio para las matrices dentro de las matemáticas fue "Introducción al álgebra lineal" escrito por Bôcher en 1907.

Turnbull y Aitken escribieron textos influyentes en los años 1930, y Mirsky con: "Una introducción al álgebra lineal" en 1955, mostró la Teoría de Matrices estableciéndola como uno de los más importantes tópicos matemáticos para estudiantes de pregrado.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Comentario

Debido a que vamos a estudiar las matrices para los programas mencionados con anterioridad, restringimos su definición.

Definición de Matriz

Es un arreglo ordenado de números (reales, complejos) en forma rectangular.

Notación

Generalmente, notaremos las matrices por medio de letras mayúsculas A,B,C,…,X,Y,Z. Los números que la forman, llamados COMPONENTES de la matriz, encerrados entre corchetes.

Ejemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -6 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Filas

Las filas de una matriz son las formadas por las componentes horizontales y se cuentan de arriba hacia abajo. Las notaremos con la misma letra de la matriz con un sub-índice a la derecha.

De los ejemplos anteriores, tenemos que:

$$A_2 =[\ 4\ -2\ -6\ 0\ 8\ ]\ B_1 =[\ 4\ 6\ 2\ -5]\ C_2 =[\ 0\ 5]$$

$$O_1 =[\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]\ I_2 =[\ 0\ 1\ 0\ ]$$

Nota: En esta notación, se puede presentar alguna confusión con la escritura de matrices especiales, para lo cual estaremos atento para señalarlo.

Columnas

Las columnas de una matriz son las formadas por las componentes verticales y se cuentan de izquierda a derecha. Las notaremos por medio de la misma letra con un súper-índice a la derecha, encerrado en paréntesis.

De los ejemplos anteriores, tenemos que:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad B^{(4)} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$O^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad I^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Orden de una matriz

Es el número de filas y de columnas que forman la matriz. Aclaramos, que no se puede conmutar "columnas y filas", puesto que siempre el primer número corresponde a las filas y el segundo a las columnas.

Con los ejemplos anteriores, escribiremos su notación, así:

Orden de la matriz A = ord (A) = 4x5 se lee: cuatro por cinco

Orden de la matriz B = ord (B) = 3x4

Orden de la matriz C = ord (C) = 2x2 = 2

Orden de la matriz O = ord (O) = 2x4

Orden de la matriz I = ord (I) = 3x3 = 3

Matriz Fila y Matriz Columna

En las notaciones anteriores se pueden apreciar que, en los ejemplos dados de las filas y las columnas, hemos encerrado entre corchetes las componentes, de lo cual se sigue que:

Matriz Fila.

Definición: Es la matriz que tiene una sola fila.

Matriz Columna.

Definición: Es aquella matriz que tiene una sola columna.

Matriz Cuadrada

Definición: Son aquellas matrices cuyo número de filas y de columnas son iguales.

En los ejemplos dados tenemos que las matrices C e I son Matrices Cuadradas y escribimos:

ord (C) = 2x2 = 2 ord (I) = 3x3 = 3

Otros ejemplos:

$$H = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 5 & 8 \\ 9 & -2 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

ord (H) = 5x5=5 ord (H) = 5x5=5

Ejercicios

(1) Escriba ejemplos de las siguientes matrices, con todas sus componentes diferentes de ceros :

(i) orden 3x5 (ii) orden 1x5 (iii) orden 5 (iv) orden 4x2

(v) orden 4x1 (vi) orden 3x3 (vii) orden 5x6

(2) Complete las siguientes matrices, dada algunas de sus filas y columnas:

(i) $A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ y $A^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(ii) $B_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

y $B^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $C^{(2)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

y $C^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 2

NOTACIÓN GENERAL

Comentario

Toda la teoría dada en el capítulo 1, la hemos trabajado por medio de ejemplos, ahora vamos a estudiarla con la notación general para facilitar los capítulos venideros, y no sólo esto, sino que la notación general ayuda al lector a ser una persona analítica y con una mayor condición para razonar.

Notación Expandida de una Matriz

Consideremos una matriz A de orden nxm. Utilizamos la letra minúscula correspondiente a esa matriz y la notaremos, así:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2m} \\ . & . & . \ \ldots & . \\ . & . & . \ \ldots & . \\ . & . & . \ \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Notación Abreviada de una Matriz

La matriz A de orden nxm se nota abreviadamente, así:

$$A = (a_{ij})_{nxm}$$ para i = 1, 2, 3,...,n y j = 1, 2, 3,...,m

Donde i indica la posición de las filas y j la posición de las columnas.

Ahora presentamos la matriz A en función de sus filas y de sus columnas: (utilizamos la notación de las filas y las columnas)
Observamos que la primera da como resultado una matriz fila y la

(i) En función de sus columnas. $A = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \ldots A_m]$

(ii) En función de sus filas.

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ . \\ . \\ . \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$$

segunda una matriz columna siendo sus componentes matrices.(más adelante, llamadas sub-matrices)

Matriz Cuadrada

Definición: Una matriz $A = (a_{ij})_{nxm}$ es Cuadrada si y sólo si n=m. Por lo anterior, tomamos la matriz $A = (aij)_{nxn}$.

Diagonal Principal de una matriz Cuadrada

Definición: Es la formada por las componentes que coinciden en la posición de fila y columna, es decir,

Diagonal principal de A = diag ($a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$)

Nota: Hemos definido la Diagonal principal de una matriz Cuadrada con todos sus nombres y apellidos porque en la definición de matriz hablamos de un arreglo ordenado en forma Rectangular y la Geometría elemental dice que un rectángulo o un cuadrado tiene dos diagonales (que son iguales), pero en el estudio de las matrices sólo interesa la que definimos anteriormente, por lo que, en lo consiguiente, sólo diremos diagonal de una matriz.

Ejemplos.

Escribir la Diagonal de cada una de las siguientes matrices:
Solución:

$$K=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Diag (K) = (5,5) , diag (P) = (2,-1,4) y diag (F) = (3,-4,3,4)

Transpuesta de una matriz

Definición: Es la matriz que se obtiene de otra al cambiar filas por columnas o columnas por filas.

Notación: Transpuesta de la matriz A = A^t

Ejemplos:

Dadas las matrices B, M y G, calcular su transpuesta
Calculamos la transpuesta de las matrices B, M y G:

$$B=\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & -4 \\ 6 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad M=\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Propiedad:

$$B^t=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad M^t=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad G^t=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \\ 4 & 4 \\ 3 & 5 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(A^t)^t = A$$

El lector puede mostrar la propiedad utilizando la notación expandida del numeral 2.2 y realizar el ejercicio con el ejemplo anterior.

Ejercicios

(1) Completar cada matriz, sabiendo que su diagonal es:

(i) diag (A) = (-3,5)

(ii) diag (B) = (-2 ,-1,-2)
(iii) diag (C) = (0,-3,0,-5)

(iv) diag (D) = (1,1,1,1)

(v) diag (F) = (-1,-1,-1,-1,-1)

(vi) diag (H) = (0,0,0)

(vii) diag (G) = (2,0,2,0,2,0)

(viii) diag (K) = (1/2,-3/2,5/2,-1/2,-5/2)

(ix) diag (L) = (-1/3,-1/3,-1/3,-1/3)

(x) diag (M) = (5,-1,3,-4,2,-6)

(2) Dadas las matrices
Identificar las siguientes componentes:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \\ 4 & -6 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & -5 & 9 \\ 2 & -9 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad y \quad K = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & -21 & -8 \\ 3 & -7 & 4 & 9 & -11 \\ -5 & 0 & -3 & 14 & -6 \\ 1 & -21 & 13 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

(3) Hallar la transpuesta de las matrices H y K .

$h_{12} = ?$, $h_{23} = ?$, $h_{14} = ?$, $h_{33} = ?$, $h_{31} = ?$, $h_{42} = ?$, $h_{21} = ?$ y $h_{44} = ?$

$k_{15} = ?$, $k_{22} = ?$, $k_{35} = ?$, $k_{45} = ?$, $k_{13} = ?$, $k_{24} = ?$, $k_{33} = ?$, $k_{42} = ?$ y $k_{25} = ?$

CAPÍTULO 3

MATRICES ESPECIALES

Introducción

Muchas matrices tienen características especiales en su forma y en sus componentes, por esto, dedicaremos este capítulo a estudiarlas, definirlas y manejar los diferentes ejemplos. Algunas de estas matrices se utilizan en diversas aplicaciones.

Matriz Nula (O)

Definición: Una matriz es Nula si cada una de sus componentes es cero; es decir,

Una matriz $O = (o_{ij})_{nxm}$ es Nula si y sólo si $o_{ij} = 0$ para todo i, *j*.

Ejemplos:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidad (I)

Definición: La matriz Identidad es aquélla cuyas componentes por encima y por debajo de la diagonal son ceros y las componentes de la diagonal son iguales a la unidad, es decir,

Una matriz $I = (i_{pq})_{nxn}$ es Identidad si y sólo si $i_{pq} = 0$ para todo $p \neq q$ y $i_{pq} = 1$ para todo $p=q$.

Ejemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La notación de I_2, I_3, I_4 I_6, es la que comentamos cuando nos referíamos a la notación de las filas de una matriz y de la misma manera para las matrices Nulas que sean cuadradas.

Matriz Diagonal

Definición: Una matriz es Diagonal si las componentes por encima y por debajo de la diagonal son ceros, es decir,

Una matriz $D = (d_{ij})_{nxn}$ es Diagonal si y sólo si $d_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Ejemplos:

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ .0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nota: Utilizando la definición de matriz diagonal, volvemos a definir la matriz

Identidad, como la matriz diagonal cuyas componentes de la diagonal son igual a la unidad. Por lo tanto, "toda matriz Identidad es una matriz Diagonal".

Matriz Escalar

Definición: Una matriz $E = (e_{ij})_{nxn}$ es Escalar si y sólo si $e_{ij} = k$ para todo $i=j$ y $e_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, es decir,

Una matriz Diagonal cuyas componentes de la diagonal sean una misma constante se llama Matriz Escalar.

"Todas las matrices Nulas, que sean cuadradas, y las matrices Identidad, son matrices Escalares".

Ejemplos:

$$E = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nota: Retomamos la matriz Identidad, diciendo que es la matriz Escalar, cuyo escalar es la unidad.

Matriz Simétrica

Definición 1: Una matriz $S = (s_{ij})_{nxn}$ es Simétrica si y sólo si s_{ij} = sji para todo *i,j*.

Definición 2: Una matriz es Simétrica, si es igual a su transpuesta, o sea, una matriz S es Simétrica si $S = S^t$.

Ejemplos:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 6 & -5 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 & 5 & 6 \\ -4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 7 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

" Todas las matrices Diagonales son matrices Simétricas ".

Matriz Anti-simétrica

Definición: Una matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$ es Anti-simétrica si y sólo si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo **i,j**.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -5 & 7 \\ -3 & 5 & 0 & -4 \\ -6 & -7 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{12} = -5 = -a_{21} = -5\ ,\ a_{13} = 4 = -a_{31} = -(-4) = 4,\ a_{23} = 3 = -a_{32} = -(-3) = 3\ \text{ y } a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

De la misma forma, el lector debe analizar la matriz K.

Matriz Triangular Superior

Definición: Una matriz $T = (t_{ij})_{nxn}$ es Triangular Superior si y sólo si $t_{ij} = 0$ para todo $i > j$, es decir,

Una matriz cuadrada cuyas componentes por debajo de la diagonal sean cero, es una Matriz Triangular Superior.

Nota: Observe el triángulo de ceros por debajo de la diagonal en cada uno de los ejemplos.

Ejemplos:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

Definición: Una matriz T = (t ij)nxn es Triangular Inferior si y sólo si tij = 0 para todo i < j , o sea ,

Una matriz cuadrada cuyas componentes por encima de la diagonal sean ceros, es una Matriz Triangular Inferior

Ejemplos:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Triángulo de ceros por encima de la diagonal.

Relación entre las matrices

Comentario

Vamos a comparar matrices con componentes reales, igual que los números reales; analizaremos la igualdad y la desigualdad de matrices. También, afirmamos que esto sólo se da en matrices del mismo orden, con componentes reales.

Igualdad de matrices

Definición: Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (a_{ij})_{nxm}$ se dice que $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo *i,j* ; esto, significa en palabras, que las componentes correspondientes de las matrices A y B son iguales.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

En las matrices A y B observamos que:

$a_{11} = b_{11} = 5$, $a_{12} = b_{12} = 2$, $a_{13} = b_{13} = -4$

$a_2 1 = b_{21} = 6$, $a_{22} = b_{22} =-1$ y $a_{23} = b_{23} = 3$

Desigualdad de matrices

Definición: Dada dos matrices $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{ij})_{nxm}$ se dice que $A > B$ si y sólo si $a_{ij} \geq b_{ij}$ para todo *i,j* y $a_{ij} > b_{ij}$ para algún *i,j*.

Ejemplos:

$$\text{Si} \quad X = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad Y = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

Decimos que X>Y , porque:

$x11 = y11 = 4$ $x12 = 3 >1 = y12$ $x21 = y21 = 7$ $x22 = -3 > -5 = y22$

Matrices No-comparables

Definición: Si dos matrices del mismo orden no satisfacen las definiciones de ser igual o mayor que, se dice que son Matrices Distintas o No-comparables.

Ejercicios propuestos

(1) Escriba un ejemplo de una matriz de orden tres, que satisfaga las siguientes condiciones :

a) Triangular Superior y no Diagonal.

b) Anti-simétrica y Escalar.

c) Anti-simétrica, Diagonal y no Escalar.

d) Simétrica, Diagonal y no Escalar.

e) Triangular Inferior y no Escalar.

(2) Escriba una matriz Identidad, sabiendo que su diagonal es: diag (1,1,1,1,1)

(3) Escriba una matriz Simétrica, de tal manera que su diagonal sea: diag (3,-5,-4,2,-1)

(4) Conteste las siguientes afirmaciones con V si son verdaderas o con F si son falsas, justificando cada elección falsa.

	V	F
a) Todas las matrices Nulas son cuadradas.	___	___
b) Existen matrices Simétricas que son Diagonales.	___	___
c) Existen matrices Nulas que no son Simétricas.	___	___
d) Toda matriz Diagonal es Anti-simétrica.	___	___
e) Dos matrices Escalares de orden 3 no son comparables.	___	___
f) Si $A = (a_{ij})_{nxn}$ es una matriz, tal que $a_{ij}= 0$ para todo $i \neq j$ y $a_{ij} \neq 0$ para algún i=j, define todas las matrices Diagonales.	___	___

CAPÍTULO 4

OPERACIONES CON LAS MATRICES

Suma de matrices

Condición necesaria para sumar dos matrices

La suma de dos matrices A y B existe, si tienen el mismo orden, es decir, dadas las matrices $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{pq})sxt$ la suma A + B existe, si n = s y m = t. En este caso se dice que las matrices A y B son CONFORMABLES para la suma.

Para la teoría siguiente, retomamos las matrices A y B, así:

$A = (a_{ij})_{nxm}$ $B = (b_{ij})_{nxm}$

Cómo se efectúa la operación (ALGORITMO):

La suma A + B se efectúa sumando las componentes respectivas de las matrices en operación. El resultado es otra matriz con el mismo orden. Expresaremos esta suma utilizando las formas expandida y abreviada de las matrices:

Supongamos que: A + B = C, entonces:

(i) En forma expandida:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2m} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \ldots b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \ldots b_{2m} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \ldots b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A + B = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

En forma abreviada:

A + B = C, donde $C = (c_{ij})_{nxm}$ y $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo
i = 1, 2, 3, . . . , n. y
j = 1, 2, 3, . . . , m.

Ejemplos. Dadas las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -9 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

se pide: (i) A + B = ? (ii) B + C = ?

(iii) = ? (iv) = ?

Solución:

$$(i)\quad A+B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (3)+(4) & (5)+(-1) & (-2)+(5) \\ (4)+(2) & (-8)+(3) & (6)+(-3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(ii)\quad B+C=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 7 & -9 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & -4 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Se deja al lector los ejercicios (iii) y (iv).

Propiedades

Supongamos que las matrices en operación son Conformables:

(1) A + B = C (Clausurativa o de Cerradura)

(2) A + O = A (Modulativa)

(3) A + B = B + A (Conmutativa)

(4) A + (B + E) = (A + B) + E (Asociativa)

(5) Para toda matriz A existe otra matriz H, tal que:

A + H = O (Inverso)

H se nota: H= -A; o sea que: A + (-A) = O

Nota: Un conjunto de elementos que bajo una operación satisfaga las propiedades (1), (2), (4) y (5) recibe el nombre de GRUPO y si además satisface la propiedad conmutativa, recibe el nombre de GRUPO CONMUTATIVO o GRUPO ABELIANO. (Abel 1802 – 1829) La definición dada es en forma de ilustración, puesto que ese tema se estudia en la carrera de Matemáticas, en la asignatura de Álgebra Abstracta.

Con la nota, concluimos que un conjunto de matrices del mismo orden, con la suma forma un Grupo Abeliano.

Mostremos la propiedad Asociativa:

Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{nxm}$, $B = (b_{ij})_{nxm}$ y $E = (e_{ij})nxm$

se tiene que: A + (B+E) = (A+B) + E

Demostración:

Supongamos que B +E = F, entonces la matriz F tiene la forma abreviada de la suma; así, $F = (f_{ij})_{nxm}$, donde $f_{ij}=b_{ij} + e_{ij}$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ y $j = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Sea A + F = G, entonces $G = (g_{ij})_{nxm}$, donde $g_{ij} = a_{ij} + f_{ij}$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ y $j = 1, 2, 3, \ldots, m$. Pero, como $f_{ij} = b_{ij} + e_{ij}$, obtenemos que $g_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + e_{ij})$, utilizando la propiedad Asociativa para números reales, tenemos que gij = (aij + bij) + eij para todo i = 1, 2, 3, . . . ,n y j = 1, 2, 3, . . .,m. por lo tanto concluimos que :

G = A + F = A + (B + E) = (A + B) + E.

Transpuesta de la suma de dos matrices

Si $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{ij})_{nxm}$, entonces

Mostremos esta propiedad:

$$(A+B)^t = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{n2}+b_{n2} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{1m}+b_{1m} & a_{2m}+b_{2m} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A^t + B^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A^t + B^t = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \dots & a_{n1} + b_{n1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{n2} + b_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{1m} + b_{1m} & a_{2m} + b_{2m} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Se observa que los resultados (1) y (2) son iguales.

Ejemplo:

$$X = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad y \quad Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$$

Completar y comprobar la siguiente igualdad:

$$(X+Y)^t = ?$$

Solución:

Primero, completaremos la igualdad, aplicando la propiedad:

$$(X+Y)^t = X^t + Y^t$$

Ahora, comprobamos el resultado:

$$X + Y = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(X+Y)^t = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \ (1)$$

$$X^t + Y^t = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \ (2)$$

Como (1) = (2), queda comprobado el resultado.

Producto de una matriz por un escalar

Cómo se efectúa la operación

El producto de una matriz A por un escalar k, es la matriz resultante del producto del escalar k (k un número real) por cada una de las componentes de la matriz A, la matriz resultante tiene el mismo matriz orden de A, es decir,

$$k\,A = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2m} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$k\,A = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \ldots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \ldots & ka_{2m} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} \ldots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$$\text{Si } X = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Se pide: (i) 3X = ? (ii) -2X = ?

Solución:

(i) $$3X = 3 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(4) & 3(-2) & 3(5) & 3(3) \\ 3(6) & 3(3) & 3(-4) & 3(5) \end{bmatrix}$$

$$3X = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 15 & 9 \\ 18 & 9 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii) } -2X = (-2) \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-2X = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -10 & -3 \\ -12 & -6 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

Propiedades

Supongamos que las matrices en operación son Conformables.
Sean A y B dos matrices, k y k1 números reales.

(1) k O = O

(2) k I = E , E matriz Escalar, con escalar k.

(3) k(A + B) = kA + kB

(4) (k + k1) A= k A + k1A

(5) k(k1A) = k1(kA) = (kk1)A

(6) $(kA)^t = kA^t$

Nota: Las propiedades anteriores no reciben los nombres que esperamos, debido a que los elementos que intervienen son de conjuntos diferentes. (Conjunto de matrices y escalares, números Reales). Por esto, entendemos por qué algunos autores sólo las llaman: Casos especiales del producto de una matriz por un escalar.

Ejercicio:

Obtenga una matriz Escalar de orden 5, con escalar -3.

Solución:

$$-3\,I = (-3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = E \text{ matriz Escalar}$$

Operaciones combinadas de suma y producto por un Escalar

Dadas las matrices:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -2 \\ 5 & -4 & -6 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

Se pide:

(i) $2M + 5N = ?$
(ii) $-3N + 4P = ?$
(iii) $3M^t + 5P^t = ?$
(iv) $-4N^t + 6M^t = ?$
(v) $2P + (3N + 4M) = ?$
(vi) $(2M^t + 3P^t) + 5N^t = ?$

Solución:

$$\text{(i)} \quad 2M + 5N = 2\begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 5 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -10 & -6 \\ 4 & 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 40 & -10 \\ 25 & -20 & -30 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 30 & -16 \\ 29 & -14 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iv)} \quad -4N^t+6M^t = (-4) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -20 \\ -32 & 16 \\ 8 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ -30 & 18 \\ -18 & 42 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -62 & 34 \\ -10 & 66 \end{bmatrix}$$

Se deja al lector la solución de los otros ejercicios.

Diferencia de matrices

Manejaremos la diferencia de dos matrices $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{ij})_{nxm}$, utilizando el Escalar negativo (Inverso Aditivo de la matriz B), esto es,

$A – B = A + (-1)B = C$, donde $C = (c_{ij})_{nxm}$ con componente

genérico $c_{ij} = a_{ij} + (-b_{ij})$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ y $j = 1, 2,3, \ldots, m$.

Ejemplos:

Utilizando las matrices anteriores M, N y P, calcular:

(i)	$M - N = ?$
(ii)	$4P - 3M = ?$
(iii)	$5N - 2P = ?$
(iv)	$-4M^t - 5P^t = ?$
(v)	$3P^t(4N^t - 2M^t) = ?$
(vi)	$(-N - 6M) - 5P = ?$
(vii)	$-0.5M - (1.5P - 4.5N) = ?$

Solución:

$$\text{(i)}\quad M - N = M + (-1)N = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -8 & 2 \\ -5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -13 & -1 \\ -3 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii)}\quad 4P - 3M = 4P + (-3)M = 4\begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 8 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 16 & -4 \\ 12 & -20 & 32 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 15 & 9 \\ -6 & -9 & -21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 31 & 5 \\ 6 & -29 & 9 \end{bmatrix}$$

(iii) $5N - 2P = ?$

$$5N - 2P = 5N + (-2)P = 5\begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 5 & -4 & -6 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 40 & -10 \\ 25 & -20 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 32 & -8 \\ 19 & -10 & -46 \end{bmatrix}$$

(v) $3Pt - (4N^t - 2M^t) = ?$

$$3P^t = 3\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -5 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 12 & -15 \\ -3 & 24 \end{bmatrix}$$

$$4N^t - 2M^t = 4N^t + (-2)M^t = \begin{bmatrix} 12 & 20 \\ -32 & -16 \\ -8 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 10 & -6 \\ 6 & -14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ -22 & -22 \\ -2 & -38 \end{bmatrix}$$

$$3P^t - (4N^t - 2M^t) = 3P^t + (-1)\ (4N^t - 2M^t) = \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 12 & -15 \\ -3 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -16 \\ 22 & 22 \\ 2 & 38 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ 34 & 7 \\ -1 & 62 \end{bmatrix}$$

Se deja al estudiante el cálculo de los ejercicios (iii), (iv), (vi) y (vii).

Transpuesta de la diferencia de dos matrices

Dada las matrices $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{ij})_{nxm}$, se tiene que:

$$(A\text{-}B)^t = A^t - B^t$$

Se deja al lector mostrar la propiedad anterior.

Ayuda : Recuerde que $A - B = A + (-1)\ B$ y en forma similar

$$A^t - B^t = A^t + (-1)\ B^t$$

Compare las igualdades correspondientes.

Ejercicios adicionales al capítulo

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) Calcular las siguientes operaciones:

(1) $3A + 5D^t = ?$
(2) $(2B^t + 4C) - 6E = ?$
(3) $-A^t + (3C - 7B^t) = ?$
(4) $(2B + 3E)^t = ?$
(5) $4C + (3B - 2A)^t = ?$
(6) $-3\,(2C - 4D)^t - 5B = ?$

(b) Completar y comprobar las siguientes igualdades:

(1) $(A + B + E)^t = ?$
(2) $(E - A + B)^t = ?$
(3) $(A^t + C)^t = ?$
(4) $(B^t - C)^t = ?$
(5) $(2E + 4C + 5B)^t = ?$
(6) $(4D - 3E^t + 6B^t)^t = ?$
(7) $(3D^t + 7C^t - 4A)^t = ?$
(8) $(2B^t - 4E^t - 5D)^t = ?$
(9) $(3B + 7C)^t - (2D - 3C^t)^t = ?$
(10) $4E^t - 4(2C - 5B)^t = ?$

CAPÍTULO 5

OPERACIONES CON LAS MATRICES

Producto de matrices

Condición necesaria para multiplicar dos matrices

El producto de dos matrices existe si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, es decir,

Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{pk})_{sxt}$ el producto $A \cdot B$ existe si $m = s$. En el caso anterior, se dice que las matrices son Conformables para el producto.

Retomemos las matrices A y B por ser Conformables de la siguiente forma y con ella desarrollamos la próxima teoría :

Sean $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{jk})_{mxt}$ las matrices.

Ejemplos para analizar la Conformabilidad:

Si $X = (x)_{2x3}$, $Y = (y)_{3x5}$ y $Z = (z)_{5x4}$, entonces:

(1) $X \cdot Y$ existe?

(2) $X \cdot Z$ existe?

(3) $Y \cdot Z^t$ existe?

(4) $Z \cdot Z^t$ existe?

(5) $Y \cdot X$ existe?

(6) $X^t \cdot X$ existe?

Respuestas:

(1) El producto $X \cdot Y$ sí existe, porque el número de columnas de la matriz X es 3, igual al número de filas de la matriz Y.

(2) $X \cdot Z$ no es Conformable, puesto que la matriz X tiene 3 columnas y la matriz Z tiene 5 filas.

(3) El producto $Y \cdot Z$ existe, o sea, son Conformables porque Y tiene 5 columnas y Z tiene igual número de filas.

(4) Z tiene 4 columnas y Z^t tiene 4 filas, Z • Z^t entonces son Conformables.

(5) El producto Y • X no existe, porque la matriz Y tiene 5 columnas y la matriz X tiene 2 filas.

(6) Z^t tiene 2 columnas y X tiene 2 filas, luego el producto Z^t • Z existe.

De los ejemplos (1) y (5) concluimos que, en general:

" EL PRODUCTO DE MATRICES NO ES CONMUTATIVO "

De acuerdo con esta conclusión, utilizaremos muchas veces los términos matriz multiplicada a izquierda o matriz multiplicada a derecha.

Expresemos los ejemplos anteriores por medio de un esquema:

(1) X (2x3) • Y (3x5) son Conformables.

=

(2) X (2x3) • Z (5x4) no son Conformables.

≠

(3) Y (3x5) • Z^t (5x4) son Conformables.

=

(4) Z (5x4) • (4x5) sí existe.

=

(5) Y (3x5) • X (2x3) no existe.

≠

(6) Z^t (3x2) • X (2x3) son Conformables.

=

Nota: Siempre existe el producto de una matriz por su transpuesta (a izquierda o a derecha).

Cómo se efectúa la operación.

Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{jk})_{mxt}$ el producto A • B se efectúa multiplicando cada una de las filas de A por cada una de las columnas de B. La matriz resultante del producto debe tener el número de filas de la matriz A y el número de columnas de la matriz B.

El producto de la i-ésima fila de A por la k-ésima columna de B es el número resultante de la sumatoria de los productos de las componentes de dicha fila y dicha columna, de tal manera que los sub-índices satisfagan la condición de Conformabilidad, esto quiere decir que el segundo sub-índice de la componente a es igual al primer sub-índice de la componente b y primer sub-índice de la componente a y segundo sub-índice de b, i y k, respectivamente.

Veamos el producto A • B con matrices expandidas, lo cual es un poco engorroso, pero hay que hacerlo por lo menos una vez en la vida.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2t} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mt} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1m}b_{m2} & \dots & a_{11}b_{1t}+a_{12}b_{2t}+\dots+a_{1m}b_{mt} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2m}b_{m2} & \dots & a_{21}b_{1t}+a_{22}b_{2t}+\dots+a_{2m}b_{mt} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\dots+a_{nm}b_{m1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\dots+a_{nm}b_{m2} & \dots & a_{n1}b_{1t}+a_{n2}b_{2t}+\dots+a_{nm}b_{mt} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{jt} \\ \sum_{j=1}^{m} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} a_{2j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{m} a_{2j}b_{jt} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} a_{nj}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{m} a_{nj}b_{jt} \end{bmatrix} = C$$

donde la matriz

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

$C = (c_{ik})_{nxt}$, con cik = para todo i= 1,2,3, …, n y k =1,2,3, …, t. Ésta es la forma abreviada del producto de matrices, la cual utilizaremos para mostrar algunas de sus propiedades.

Ejemplos:

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 6 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

se pide calcular:

(i) $A \cdot B = ?$

(ii) $B \cdot C = ?$

(iii) $B \cdot B^t = ?$

(iv) $A \cdot A^t = ?$

Solución :

(i) $A \cdot B = ?$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 6 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-3)(2)+(-2)(5)+(4)(-3) & (-3)(-1)+(-2)(-2)+(4)(5) & (-3)(4)+(-2)(6)+(4)(-2) & (-3)(-3)+(-2)(4)+(4)(5) \\ (5)(2)+(4)(5)+(-1)(-3) & (5)(-1)+(4)(-2)+(-1)(5) & (5)(4)+(4)(6)+(-1)(-2) & (5)(-3)+(4)(4)+(-1)(5) \\ (3)(2)+(-2)(5)+(2)(-3) & (3)(-1)+(-2)(-2)+(2)(5) & (3)(4)+(-2)(6)+(2)(-2) & (3)(-3)+(-2)(4)+(2)(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-6-10-12) & (3+4+20) & (-12-12-8) & (9-8+20) \\ (10+20+3) & (-5-8-5) & (20+24+2) & (-15+16-5) \\ (6-10-6) & (-3+4+10) & (12-12-4) & (-9-8+10) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -28 & 27 & -32 & 21 \\ 33 & -18 & 46 & -4 \\ -10 & 11 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$
\text{(ii)}\quad B\cdot C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -3\\ 5 & -2 & 6 & 4\\ -3 & 5 & -2 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -2\\ -5 & -3\\ 2 & -1\\ 4 & 5\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} (2)(3)+(-1)(-5)+(4)(2)+(-3)(4) & (2)(-2)+(-1)(-3)+(4)(-1)+(-3)(5)\\ (5)(3)+(-2)(-5)+(6)(2)+(4)(4) & (5)(-2)+(-2)(-3)+(6)(-1)+(4)(5)\\ (-3)(3)+(5)(-5)+(-2)(2)+(5)(4) & (-3)(-2)+(5)(-3)+(-2)(-1)+(5)(5)\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} (6+5+8\ \ 12) & (-4+3-4\ \ 15)\\ (15+10+12+16) & (-10+6-6+20)\\ (-9\ \ 25-4+20) & (6\ \ 15+2+25)\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 7 & -20\\ 53 & 10\\ -18 & 18\end{bmatrix}
$$

$$
\text{(iii)}\quad B\cdot B^{t}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -3\\ 5 & -2 & 6 & 4\\ -3 & 5 & -2 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3\\ -1 & -2 & 5\\ 4 & 6 & -2\\ -3 & 4 & 5\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} (4+1+16+9) & (10+2+24-12) & (-6-5-8-15)\\ (10+2+24-12) & (25+4+36+16) & (-15-10-12+20)\\ (-6-5-8\ \ 15) & (-15-10-12+20) & (9+25+4+25)\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 30 & 24 & -34\\ 24 & 81 & -17\\ -34 & -17 & 63\end{bmatrix}
$$

$$
\text{(iv)}\quad A^{t}\cdot A=\begin{bmatrix} -3 & 5 & 3\\ -2 & 4 & -2\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 & -2 & 4\\ 5 & 4 & -1\\ 3 & -2 & 2\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} (9+25+9) & (6+20-6) & (-12\ \ 5+6)\\ (6+20-6) & (4+16+4) & (-8-4-4)\\ (-12-5+6) & (-8-4-4) & (16+1+4)\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 43 & 20 & -11\\ 20 & 24 & -16\\ -11 & -16 & 21\end{bmatrix}
$$

Nota: El producto de una matriz por su transpuesta (A izquierda o a derecha) debe dar como resultado una matriz Simétrica.

Propiedades

Supongamos que las matrices en operación son Conformables para la suma y el producto.

(1) (i) $A \cdot O = O$

(ii) $O \cdot A = O$ (Anulativa)

(2) (i) $A \cdot I = A$

(ii) $I \cdot B = B$ (Modulativa)

(3) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (Asociativa)

(4) (i) $A \cdot (X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y$ (Distributiva a izquierda)

(ii) $(X + Y) \cdot B = X \cdot B + Y \cdot B$ (Distributiva a derecha)

(5) Para alguna matriz A existen dos matrices H_1 y H_2 tales que:

(i) $A \cdot H_1 = A$ (Inversa a derecha)

(ii) $H_2 \cdot A = A$ (Inversa a izquierda)

Nota: Como en un principio hablamos de un curso introductorio, entonces sólo escribiremos una Inversa a derecha y a izquierda, o sea, $H_1 = H_2 = H$.

H se nota: H = A-1 se lee: Inversa de la matriz A o A inversa.

(6) En general: $A \cdot E \neq E \cdot A$

Veamos la propiedad Distributiva a Izquierda.

Si $A = (a_{ij})_{nxm}$, $X = (x_{jk})_{mxt}$ y $Y = (y_{jk})_{mxt}$, entonces:

$A \cdot (X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y$

Demostración: Para mostrar la propiedad, utilizaremos la forma abreviada de la suma y producto de matrices.

Sea $X + Y = Z$, donde la matriz $Z = (z_{jk})_{mxt}$, con $z_{jk} = x_{jk}$ + yjk para todo $j = 1, 2, \ldots, m$ y $k = 1, 2, \ldots, t$.

Tomemos al producto A • Z = W, por lo tanto, la matriz W tendrá la forma:

$W = (w_{ik})_{nxt}$, donde

$$w_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, z_{jk}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y $k = 1, 2, \ldots, t$.

Por lo tanto, podemos escribir:

$$w_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (x_{jk} + y_{jk}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, x_{jk} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_{jk}$$

(propiedad distributiva de reales y la sumatoria), para todo **i** = 1, 2, …, n y $k = 1, 2, \ldots, t$.

Pero, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, x_{jk}$ y $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_{jk}$ representan a los productos

A • X y A • Y respectivamente.

Entonces , W = A • Z = A • X + A • Y, lo que queríamos mostrar.

Casos especiales de productos de matrices que sí conmutan

Ejemplo 1.

Para una matriz cuadrada y la matriz Identidad del mismo orden.

Sean:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & -2 & 7 \\ 5 & -5 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$(i) \qquad B \cdot I \quad = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & -2 & 7 \\ 5 & -5 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & -2 & 7 \\ 5 & -5 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \qquad I \cdot B \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & -2 & 7 \\ 5 & -5 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & -2 & 7 \\ 5 & -5 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Los productos (i) y (ii) son iguales.

Generalizando:

Sean $B = (b_{ij})_{nxn}$ y In dos matrices, entonces

$$In \cdot B = B \cdot In$$

Ejemplo 2.

El producto de una matriz cuadrada por una matriz Nula del mismo orden.

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad O_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(i) \qquad C \,.\, O_3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \qquad O_3 \,.\, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En general, si $C = (c_{ij})_{nxn}$ y O_n, entonces

$$C \cdot O_n = O_n \cdot C = O_n$$

Ejemplo 3.

El producto de una matriz por ella misma.

$$J = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad J \cdot J = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -27 \\ 54 & -2 \end{bmatrix}$$

Lógicamente, esto sólo se da cuando la matriz es cuadrada.

Tomemos una matriz P = (pij)nxn, entonces

$P \cdot P = P \cdot P$

Ejemplo 4.

Dadas las matrices:

$$N = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 8 & -5 & -3 \end{bmatrix} \qquad y \qquad E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Se tiene que:

$$(i)\ N \cdot E = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 8 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & -12 & 16 \\ 8 & 24 & -4 \\ 32 & -20 & -12 \end{bmatrix}$$

$$(ii)\ E \cdot N = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 8 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & -12 & 16 \\ 8 & 24 & 4 \\ 32 & -\ 20 & -12 \end{bmatrix}$$

Los resultados son iguales (i) = (ii)

Observemos el resultado:

$$N \cdot E = N \cdot (4\,I) = 4\,(N \cdot I) = 4\,N$$

Luego, podemos generalizar este producto, así:

Dada la matriz A de orden n, cualquiera, y E una matriz Escalar de orden n, con escalar k, entonces:

$A \cdot E = E \cdot A = k\,A$ (producto del escalar k por la matriz A)

Ejemplo 5.

Veamos el producto siguiente:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D \cdot F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$F \cdot D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

El resultado D • F = F • D, se puede generalizar, así:

Si D es una matriz Diagonal de orden n y F es otra matriz Diagonal del mismo orden, tal que:

diag (D) = $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ y diag (F) = $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$

Entonces:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & f_n \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$D \cdot F = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & f_n \end{bmatrix}$$

$$D \cdot F = \begin{bmatrix} d_1 f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 f_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & d_n f_n \end{bmatrix} \text{(i)}$$

$$F \cdot D = \begin{bmatrix} f_1 d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 d_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & f_n d_n \end{bmatrix} \text{(ii)}$$

Los resultados (i) y (ii) son iguales.

Matrices Divisoras de Cero (o de la matriz Nula)

Comenzamos a comparar algunas propiedades o resultados de los números reales con las matrices.

Para a y b números reales, cualesquiera, se tiene que:

Si $a \cdot b = b \cdot a = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

Pero, si tenemos las matrices

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \text{ entonces}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El resultado de $H \cdot G = O$, esto nos permite enunciar el siguiente teorema:

Teorema. Dadas dos matrices A y B conformables, tal que $A \cdot B = O$, entonces no necesariamente $A = O$ ó $B = O$.

En el ejemplo se observa que H y G son matrices no-Nulas.

Transpuesta del producto de dos matrices

Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{jk})_{mxt}$, entonces

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Se deja la demostración al lector. (Ayuda: tiene que trabajar con matrices expandidas).

Ejemplos:

Sean X, Y y Z las siguientes matrices:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad y \quad Z = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Completar y comprobar las igualdades siguientes:

Debe utilizar todas las propiedades conocidas.

(i) $(X \cdot Y)^t = ?$
(ii) $(X \cdot Z)^t = ?$
(iii) $(Z \cdot Z)^t = ?$
(iv) $(Z^t \cdot Y)^t = ?$
(v) $(X \cdot Y \cdot Z)^t = ?$
(iv) $[(X \cdot Y^t)] \cdot Z^t = ?$

Solución:

(i) Completemos primero la igualdad:

$$(X \cdot Y)^t = Y^t \cdot X^t$$

Comprobación:

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 13 & -50 \end{bmatrix}$$

$$(X \cdot Y)^t = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \text{(i)}$$

$$Y^t \cdot X^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -6 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ -0 & 50 \end{bmatrix} \text{(ii)}$$

Los productos (i) y (ii) son iguales.

(iv) Completamos primero la igualdad:

$$(Z^t \cdot Y)^t = Y^t \cdot (Z^t) = Yt \cdot Z$$

Comprobamos la igualdad:

$$Z^t \cdot Y = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ -5 & 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & -4 \\ 14 & 16 \\ -17 & 38 \end{bmatrix}$$

$$(Z^t \cdot Y)^t = \begin{bmatrix} 26 & 14 & -17 \\ -4 & 16 & 38 \end{bmatrix} \text{(i)}$$

$$Y^t \cdot Z = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -6 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 6 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 14 & -17 \\ -4 & 16 & 38 \end{bmatrix} \text{(ii)}$$

Los productos (i) y (ii) son iguales.

Se deja al estudiante la solución de los demás ejercicios.

Ejercicios adicionales al capítulo

(1) Conteste las siguientes afirmaciones con V si son verdaderas o con F si son falsas, justificando cada elección falsa:

	V	F
(i) Siempre se pueden multiplicar dos matrices cuadradas.	____	____
(ii) Para dos matrices P y Q conformables, se tiene que $(P \cdot Q)^t = P^t \cdot Q^t$	____	____
(iii) Si una matriz A tiene orden 3x5 y otra matriz B es de orden 5x2, entonces el producto A • B es conformable.	____	____

(iv) Si las matrices X y Y son tales que ord (X) = 4x2 y ord(Y) = 4x5, entonces el producto $Y^t \cdot X$ existe. ____ ____

(v) Para dos matrices D y E conformables,se tiene que: ____ ____
$(2D \cdot E)^t = 2D^t \cdot E^t$

(vi) Si las matrices A, B y C son conformables para la operación respectiva, tenemos que: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + C \cdot A$ ____ ____

(vii) Si las matrices E y F son Escalares, con diag(E) = (3, 3, 3) y diag(F) = (-5,-5,-5), el resultado del producto $E \cdot F$ es otra matriz Escalar. ____ ____

(viii) El resultado $E \cdot F$ anterior, es una matriz Diagonal, con diag($E \cdot F$) = (2, 2, 2). ____ ____

(ix) El resultado del ejercicio 7, se resume con $E \cdot F = 2\, I_3$ ____ ____

(2) Escoja tres matrices, no cuadradas, con todas sus componentes diferentes de cero y compruebe:

(I) La propiedad Distributiva a derecha.

(II) La propiedad Distributiva a izquierda.

(3) Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \\ 8 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & -7 \\ 5 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -7 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \qquad E=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H=\begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pide calcular:

(i) $B \cdot E = ?$
(i) $F \cdot H = ?$
(iii) $C \cdot E = ?$
(iv) $E \cdot C^t = ?$
(v) $H \cdot F^t = ?$
(vi) $B \cdot (C + E) = ?$

Conclusión de los productos anteriores.

(g) (7) $A \cdot (C + E) = ?$ Completar y comprobar.
Conclusión?

(4) Escoja dos matrices que satisfagan el teorema de Matrices Divisoras de Cero para:

(I) Matrices de orden dos.

(II) Matrices de orden tres.

(III) Matrices de orden cuatro.

CAPÍTULO 6

INVERSA DE UNA MATRIZ

Comentario

Las únicas matrices candidatas a tener Inversa son las matrices cuadradas.

Definición : Inversa de una matriz

Dada una matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$, si existen dos matrices B_1 y B_2 del mismo orden, que satisfagan los productos

(1) $A \cdot B_1 = I_n$ y (2) $B_2 \cdot A = I_n$

se dice que B_1 es la matriz Inversa a derecha de A y B_2 es la inversa a izquierda de A.

Teorema de unicidad(6.1)

La inversa de una matriz es única a izquierda o a derecha, es decir, si A es una matriz de orden n y existen dos matrices B_1 y B_2 de orden n, tales que (1) $A \cdot B_1 = I_n$ y (2) $B_2 \cdot A = I_n$, entonces $B_1 = B_2$

Demostración:

Realizamos el siguiente producto: $B_2 \cdot A \cdot B_1$ y aplicamos la propiedad Asociativa, así:

$$(B_2 \cdot A) \cdot B_1 = B_2 \cdot (A \cdot B_1)$$

$$I_n \cdot B_1 = B_2 \cdot I_n \qquad \text{(Modulativa)}$$

$$B_1 = B_2$$

$B_1 = B_2$ se nota: $B_1 = B_2 =$ (Inverso multiplicativo)

Con esta notación, planteamos las igualdades de la definición de Inversa de la matriz A, así:

$$(1)\ A^{-1} \cdot A = I_n \quad y \quad (2)\ A \cdot A^{-1} = I_n$$

En este caso se dice que la matriz A es INVERTIBLE.

Definición:

Se dice que A es una matriz REGULAR o NO-SINGULAR, si A es una matriz Invertible.

Definición:

Se dice que A es una matriz SINGULAR si la matriz A es No-invertible, esto es , la matriz A no tiene Inversa.

Nota1: Este es otro caso especial de conmutatividad del producto de dos matrices.

Nota 2: Para los ejemplos siguientes sólo realizaremos uno de los dos productos e inclusive cuando se pida comprobar un resultado.

Teorema.(6.2) Si A es una matriz Invertible, entonces su inversa también es Invertible y se tiene que:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Demostración:

Por definición de inversa, tenemos que:

$$(1)\ A \cdot A^{-1} = I_n \quad y \quad (2)\ A^{-1} \cdot A = I_n$$

Utilizando (1) y multiplicado a cada lado de la igualdad por a derecha, obtenemos:

$$A \cdot [A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1}] = I \cdot (A^{-1})^{-1} \quad \text{(Asociativa)}$$

$$A \cdot I = (A^{-1})^{-1} \quad \text{(Def. Inversa y Modulativa)}$$

$$A = (A^{-1})^{-1} \quad \text{(Modulativa)}$$

Teorema.(6.3) Si A es una matriz Invertible, entonces para cualquier escala k diferente de cero la matriz kA es Invertible y se tiene que:

$$(k\,A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

Demostración:

Utilizando las propiedades del producto de un escalar por una matriz, tenemos que:

$$(k\,A)(\frac{1}{k} A^{-1}) = \frac{1}{k}(k\,A)\,A^{-1} = (\frac{1}{k} k)\,A \cdot A^{-1} = (1)\,I = I$$

De donde kA es Invertible y

$$(k\,A)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

Casos especiales de la inversa

(1) La inversa de las matrices Identidad son las mismas matrices Identidad, puesto que:

$I_n \cdot I_n = I_n \cdot I_n = I_n$

(2) Para matrices Diagonales, donde cada una de las componentes de la diagonal sea diferente de cero.

Ejemplos:

Dadas las matrices:

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad y \quad Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcular la Inversa de cada una de ellas.

De acuerdo con los productos conmutativos de las matrices Diagonales, sólo tenemos que trabajar con los inversos multiplicativos de los números reales que forman la diagonal, así:

Solución:

La Inversa de la matriz R es:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el producto

$$R \cdot R^{-1} = I_3$$

$$R \cdot R^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de S es : $S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Calculamos el producto

$$S \cdot S^{-1} = I_4$$

$$S \cdot S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, calculamos la inversa de la matriz Q:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Realizamos el producto

$$Q \cdot Q^{-1} = I_4$$

$$Q \cdot Q^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos a generalizar el caso (2):

Sea $C = (c_{ij})_{nxn}$ una matriz, tal que $c_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$ y $c_{ij} \neq 0$ para todo $i = j$, entonces la matriz C y su inversa vienen dadas por:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

y la inversa de C será:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_{33} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/c_{nn} \end{bmatrix}$$

Inversa del producto de dos matrices

La inversa del producto de dos matrices es igual al producto de las inversas de cada matriz invirtiendo el orden, es decir,

Teorema.(6.4) Dadas dos matrices A y B de orden n, con A^{-1} y B^{-1} inversas de A y B, respectivamente, entonces su producto es Invertible y se tiene que:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Demostración:

Mostremos primero que $B^{-1} \cdot A^{-1}$ es la Inversa de $A \cdot B$, esto quiere decir que deben satisfacerse los dos productos:

$$(1)\ (A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = I \quad \text{y} \quad (2)\ (B^{-1} \cdot A^{-1})(A \cdot B) = I$$

Veamos la igualdad (1):

$$\begin{aligned}
(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} && \text{(Asociativa)} \\
&= A \cdot (I \cdot A^{-1}) && \text{(Def. Inversa y Asociativa)} \\
&= A \cdot A^{-1} && \text{(Modulativa)} \\
&= I && \text{(Def. Inversa)}
\end{aligned}$$

De la misma forma, el estudiante debe mostrar la igualdad (2).

Como sabemos que (1) y (2) son hipótesis, partimos de una de ellas:

(2) $(B^{-1} \cdot A^{-1})(A \cdot B) = I$ multiplicando por $(A \cdot B)^{-1}$ a derecha, a cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned}
(B^{-1} \cdot A^{-1})[(A \cdot B)\ (A \cdot B)^{-1}] &= (A \cdot B)^{-1} && \text{(Asociativa y Modulativa)} \\
(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot I &= (A \cdot B)^{-1} && \text{(Def. Inversa)} \\
(B^{-1} \cdot A^{-1}) &= (A \cdot B)^{-1} && \text{(Modulativa)}
\end{aligned}$$

Propiedad de la inversa y la transpuesta

Teorema.(6.5) Si A es una matriz invertible, entonces su transpuesta también es invertible y se tiene que:

$$A^{-t} = (A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$$

Queremos resaltar que A^{-t} es sólo nuestra notación y que las operaciones se realizan de acuerdo al orden tomado de la igualdad precedente.

Demostración:

Sabemos que A es invertible y de la definición de inversa tenemos que:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Aplicando transpuesta a cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$(A \cdot A^{-1})^{t} = (I)^{t}$$

Ahora, transpuesta del producto

$$(A^{-1})^{t} \cdot A^{t} = I$$

Multiplicando por $(A^{t})^{-1}$ a derecha a cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$[(A^{-1})^{t} \cdot A^{t}] \cdot (A^{t})^{-1} = I \cdot (A^{t})^{-1}$$

$$(A^{-1})^{t} \cdot [A^{t} \cdot (A^{t})^{-1}] = (A^{t})^{-1} \quad \text{(Asociativa y Modulativa)}$$

$$(A^{-1})^{t} \cdot I = (A^{t})^{-1} \quad \text{(Def. Inversa)}$$

$$(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1} \quad \text{(Modulativa)}$$

Definición.

Se dice que una matriz A de orden n, con componentes reales es ORTOGONAL si

$$A^{-1} = A^{t}$$

Inversa de una matriz de orden dos

Comentario

Hasta el momento hemos realizado toda la teoría para matrices de cualquier orden (cuadradas para la inversa). Vamos a hallar en forma particular la inversa de una matriz, las de orden dos por la facilidad para calcular su determinante, tema que ampliaremos en un próximo capítulo, para luego completar el Álgebra de Matrices.

Pasos para calcular la Inversa de una matriz de orden dos:

Dada la matriz Invertible:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Calculamos su inversa efectuando cuatro pasos:

Paso 1. Se calcula el determinante de la matriz.

Notación: determinante de A = D (A) = det(A) = $\left| A \right|$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Paso 2. Se intercambian las componentes de la diagonal en la matriz A.

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Paso 3. Se cambian de signo a las otras dos componentes de la matriz obtenida en el paso 2.

$$\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Paso 4. Se divide cada una de las componentes de la matriz anterior, por el determinante de la matriz A.

La matriz resultante en el paso cuatro es la inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{bmatrix}$$

Se deja al lector probar que la matriz del paso 4 es la inversa de la matriz A.

Ejemplos:

Dadas las matrices:

$$X = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad Z = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcular la matriz inversa de X y Z. Comprobar el resultado.

Solución:

Inversa de la matriz X :

Paso 1. Hallamos el determinante de la matriz X, así:

$$\det(X) = (4)(-2)-(-3)(2) = -8+6 = -2$$

Paso 2. Intercambiamos las componentes de la diagonal de la matriz X:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Paso 3. Cambiamos de signo las otras dos componentes de la matriz hallada en el paso 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Dividimos las componentes de la matriz hallada en el paso 3 por el determinante de la matriz X.

La matriz resultante es la inversa de X.

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{-2} & \dfrac{3}{-2} \\ \dfrac{-2}{-2} & \dfrac{4}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Comprobemos el resultado:

El resultado se prueba mediante la definición de inversa:

$$(1) \quad X \cdot X^{-1} = I_2 \quad \text{y} \quad (2) \quad X^{-1} \cdot X = I_2$$

Realizamos el primer producto:

$$X \cdot X^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{2}{-2} & \dfrac{3}{-2} \\ \dfrac{-2}{-2} & \dfrac{4}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Recomendamos utilizar las matrices no simplificadas para hacer la comprobación, ya que esto facilita la operación del producto de las matrices, manteniendo en sus componentes el común denominador.

Ahora, calcularemos la inversa de la matriz $Z = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Paso 1. det(Z)=(15)-(12) = 3

Paso 2. y paso 3. Obtenemos : $\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

Paso 4. $Z^{-1} = \begin{bmatrix} -3/3 & -6/3 \\ -2/3 & -5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2/3 & -5/3 \end{bmatrix}$

Comprobemos el resultado:

Calculamos el segundo producto:

$$Z^{-1} \cdot Z = \begin{bmatrix} -3/3 & -6/3 \\ -2/3 & -5/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios adicionales al capítulo

(1) Conteste las siguientes afirmaciones con V si son verdaderas o con F si son falsas, justificando cada elección falsa

	V	F
(i) Siempre existe la inversa de una matriz de orden dos.	-----	-----
(ii) Si una matriz A es invertible, entonces su Inverso Aditivo no es invertible.	-----	-----
(iii) Si dos matrices son invertibles, entonces la suma de ellas también lo es.	-----	-----
(iv)Para matrices A, B y C de orden dos e Invertibles se tiene que:	-----	-----
(iv) Para matrices D y E de orden dos, siendo E invertible se cumple que:	-----	-----
(vi)La inversa de una matriz Identidad de orden seis es la misma.	-----	-----

(2) **Escriba dos matrices Escalares de orden cinco, con escalares 2/3 y -3/5 respectivamente y calcule su inversa. Compruebe los resultados**

(3) **Dadas las matrices**

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5/2 & -4 \\ 3/2 & -4 \end{bmatrix}$$

Completar y comprobar, utilizando todas las propiedades, las siguientes igualdades:

(i) $(B^{t} \cdot C^{-1})^{-1} = \ ?$

(ii) $(A \cdot B^{-1} \cdot C)^{-1} = \ ?$

(iii) $(A^{-1} \cdot C^{t})^{-t} = \ ?$

(iv) $(A^{-1})^{t} \cdot (B^{-1} + A)^{t} \cdot (\mp B^{-1}?)^{-t}$

(v) $(B^{-1} \cdot C \cdot A^{t})^{-t} = \ ?$

(4) **Mostrar que si las matrices D y E satisfacen la condición de ser matrices Divisoras de Cero, entonces las matrices D y E no son Invertible**

(5) **Calcular la inversa de las siguientes matrices :**

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \\ \operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \sec(x) & \tan(x) \\ \tan(x) & \sec(x) \end{bmatrix}$$

(6) **Si A • B = O , B O , ¿ es A Regular ?**

(7) **Si,** $A^{2} = O$ **¿ es A Regular ?**

(8) **Si A y B son Ortogonales, ¿ es A • B Ortogonal ? ¿ es** A^{-1} Ortogonal ?

(9) **Si** $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **¿ es X Ortogonal ?**

(10) **Si** $W = \begin{bmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ \operatorname{sen}(x) & -\cos(x) \end{bmatrix}$ **¿ es W Ortogonal ?**

CAPÍTULO 7

POTENCIACIÓN

Comentario

Trabajaremos la Potenciación de matrices con números enteros positivos, puesto que las bases sólo son el producto de matrices.

Potenciación para una matriz A de orden n

Por definición, escribimos

$$A^0 = I_n$$

$$\begin{aligned}
A^0 &= I_n \\
A^1 &= A \\
A^2 &= A \cdot A \\
A^3 &= A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = A \cdot A^2 \\
A^4 &= A \cdot A \cdot A \cdot A = A^3 \cdot A = A \cdot A^3 = A^2 \cdot A^2 \\
&\vdots \\
A^m &= \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ \ldots \ \cdot A}_{m \text{ veces}}
\end{aligned}$$

Ejemplos (1)

Dadas las matrices:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcular: (i) $X^2 = ?$

(ii) $Y^3 = ?$

(iii) $Z^4 = ?$

(iv) $Y^2 \cdot X^3 = ?$

(v) $Z^2 \cdot (X^4 + Y^2) = ?$

(vi) $(X^2 + Z^3)^2 = ?$

(vii) $(X^{-1})^2 = ?$

(viii) $(Y^4)^{-1} = ?$

Solución:

(i) $X^2 = X \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 15 & -9 \end{bmatrix}$

(ii) $Y^3 = Y \cdot Y^2$

$$Y^2 = Y \cdot Y = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$Y^3 = Y \cdot Y^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 21 \\ -14 & 13 \end{bmatrix}$$

(viii) $Y^4 = Y^2 \cdot Y^2 = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & -45 \\ 30 & -29 \end{bmatrix}$

$$(Y^4)^{-1} = ?$$

$$\det(Y^4) = (46)(-29) - (-45)(30) = 16$$

$$(Y^4)^{-1} = \begin{bmatrix} -29/16 & 45/16 \\ -30/16 & 46/16 \end{bmatrix}$$

Se deja al estudiante el cálculo de los ejercicios (iii). (iv), (v), (vi) y (vii).

Ejemplo (2) Aplicación.

Una empresa ensambladora de autos fabrica siete modelos diferentes de automóviles. Para lo cual establece Requerimientos o Ensambles Directos e Indirectos.

-Requerimientos directos: es la materia prima con que cuenta la fábrica al iniciar el primer nivel de producción.
-Requerimientos indirectos: son las necesidades que tiene la empresa a partir del segundo nivel de producción.

Para desarrollar el ejemplo, tomamos el siguiente modelo representado en la tabla No 1.

Tabla No 1

Productos	A	B	D	E	G
Requerimientos	3D 2G	2ª 1F 2G	2C 2F	1D 2F	3D 2E

La tabla 1. la llevamos a un cuadro de doble entrada para obtener una visión completa de los modelos.

En la tabla 2. notamos en sus filas las partes o ensambles que se utilizan para producir uno de los modelos, representados por las columnas.

Tabla No 2

Productos	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	2	0	0	0
D	3	0	0	0	1	0	3
E	0	0	0	0	0	0	2
F	0	1	0	2	2	0	0
G	1	2	0	0	0	0	0

De la tabla 2. concluimos que C y F son partes, B es el ensamble de más alto nivel, o sea, que no se utiliza como insumo de otro ensamble más complejo, y si un producto necesita de otro en forma directa o indirecta, entonces este producto no debe requerir del primero. Representamos por

N la matriz resultante de la tabla 2, donde N representa "El primer nivel producción" y además donde se establecen los requerimientos directos.

N^2 representa la matriz del segundo nivel de producción, el tercer nivel de producción y supongamos que existe k niveles de producción, es decir, representa el k-ésimo nivel de producción. Con esto mostramos, en forma teórica y con el ejemplo, que , o sea, allí termina la producción.

Aplicamos potenciación para ver cuántos niveles de producción existen:

$$N^2 = N \cdot N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = N \cdot N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^4 = N^2 \cdot N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^5 = N^3 \cdot N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$N^6 = N^3 \cdot N^3, = O$ este resultado indica que existen cinco niveles de producción.

Notamos con T a la matriz de los requerimientos totales, por lo tanto tenemos que:

Las componentes de la matriz T, t_{ij} representan al número total de

$$T = I + N + N^2 + N^3 + N^4 + N^5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 52 & 1 & 2 & 2 & 0 & 10 \\ 8 & 20 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 20 & 59 & 0 & 2 & 4 & 1 & 14 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

partes o ensambles i que deben ser fabricadas o ensambladas en algún nivel de producción para obtener una unidad del producto j. (un modelo de auto). Veamos otra forma de obtener la matriz T.

Planteamos el resultado en forma general:

$T = I + N + N^2 + \ldots + N^k$ multiplicando a derecha por $I - N$, a cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$T\,(I - N) = (I + N + N^2 + \ldots + N^k)(I - N)$$

$$= I + N + N^2 + \ldots + N^k - N - N^2 - \ldots - N^k - N^{k+1}$$

$$= I - N^{k+1} = I - O = I, \text{ o sea, } T \cdot (I - N) = I \qquad (1)$$

Si el lector realiza el producto I – N a izquierda, obtiene:

$$(I - N) \cdot T = I \quad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) concluimos que:

$$T = (I - N)^{-1}$$

Ahora, volvemos al ejemplo y tenemos que:

$$I - N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot (I - N) = I_7$$

Potenciación para números racionales positivos

Manifestamos que no existe el Algoritmo que calcula la raíz cuadrada, raíz cúbica, raíz cuarta, etc. de una matriz y, por lo tanto, para hablar de potencias racionales, la herramienta con que contamos sigue siendo el producto de matrices. Lo expresamos mediante los siguientes ejemplos:

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Tenemos que:

(i) $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = D$

Por lo tanto, $D^{1/2} = A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(ii) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -12 \\ 18 & -8 \end{bmatrix}$

$= E$

Por lo tanto, $E^{1/3} = A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(iii) $A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 & -32 \\ 48 & -20 \end{bmatrix}$

$= F$

Lo cual significa que: $F^{1/4} = A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(ii) $B^2 = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & -24 \\ -32 & 21 \end{bmatrix} = H$

Esto se puede escribir, así :

$$H^{1/2} = B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} 37 & -24 \\ -32 & 21 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -281 & 183 \\ 244 & -159 \end{bmatrix}$$

$= L$

Del resultado anterior, concluimos que:

$$L^{1/3} = B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Potenciación para números enteros negativos

Supongamos que la matriz A es Invertible y de orden n, entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A^{0} &= I_n \\
A^{-1} &= (A)^{-1} \\
A^{-2} &= A^{-1} \cdot A^{-1} = (A^{2})^{-1} \\
A^{-3} &= A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} = A^{-2} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-2} = (A^{3})^{-1} \\
A^{-4} &= A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} = A^{-2} \cdot A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-3} = A^{-3} \cdot A^{-1} = (A^{4})^{-1} \\
&\vdots \\
A^{-m} &= \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{m \text{ veces}} = (A^{m})^{-1}
\end{aligned}
$$

Nota 1. Las igualdades escritas en la potenciación anterior son cada una caminos diferentes para resolver las potencias, y la última igualdad es otro camino totalmente diferente a las igualdades precedentes. Por lo tanto, cada persona debe ser capaz de elegir el mejor de los caminos para resolver las potencias para una matriz.

Nota 2. "La última igualdad en la teoría anterior se resume diciendo que: Si una matriz es Invertible, entonces las potencias de ellas también son Invertibles."

Ejemplos:

Dadas las matrices:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcular:

(i) $P^{-2} = ?$

(ii) $Q^{-3} = ?$

(iii) $Q^{-2} \cdot P^{-3} = ?$

(iv) $(P \cdot Q^{-1})^{-1} = ?$

(v) $(Q^{-t} \cdot P^{-1})^{-2} = ?$

(vi) $(P^4)^{-t} = ?$

(vii) $(P^{-2} \cdot Q^3)^{-1} = ?$

(viii) $P^{-2t} = ?$

Solución:

(i) $P^{-2} = P^{-1} \cdot P^{-1}$

det(P) = -10 + 8 = -2

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/-2 & 4/-2 \\ -2/-2 & 5/-2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-2} = P^{-1} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5/2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3/2 & 17/4 \end{bmatrix}$$

(v) $(Q^{-t} \cdot P^{-1})^{-2} = [(Q^{-t} \cdot P^{-1})^2]^{-1} = ?$

$$Q^{-t} = (Q^t)^{-1}$$

$$Q^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det(Q^t) = -2 + 4 = 2$

$$Q^{-t} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(Q^{-t} \cdot P^{-1})^2 = (Q^{-t} \cdot P^{-1}) \cdot (Q^{-t} \cdot P^{-1})$$

$$Q^{-t} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 \\ -3/2 & 11/4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $(Q^{-t} \cdot P^{-1})^2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 \\ -3/2 & 11/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 \\ -3/2 & 11/4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -7/8 & 27/16 \\ -27/8 & 103/16 \end{bmatrix}$$

Ahora, $\det (Q^{-t} \cdot P^{-1})^2 = (-7/8)(103/16) - (-27/8)(27/16)$

$$= 1/16$$

La primera igualdad es notación y las siguientes, el camino para calcular las operaciones.

$$(P^{-1})^2 = P^{-1} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3/2 & 17/4 \end{bmatrix}$$

$$P^{-2t} = [(P^{-1})^2]^t = \begin{bmatrix} -1 & -3/2 \\ 3 & 17/4 \end{bmatrix}$$

Se deja al estudiante calcular los ejercicios (ii), (iii), (iv), (vi) y (vii). Calcular (viii) utilizando la última igualdad.

Completamos el álgebra de matrices

Comentario

Vamos a comparar en esta parte del capítulo 7. las matrices con el Álgebra de los números Reales. Para esto, utilizaremos las letras minúsculas para reales y las mayúsculas para las matrices:

Expresiones de grado dos

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ahora, con matrices:

(i) $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A\cdot(A+B) + B\cdot(A+B)$

$= A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B$

$= A^2 + A\cdot B + B\cdot A + B^2$

(ii) $(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A\cdot(A-B) - B\cdot(A-B)$

$= A^2 - A\cdot B - B\cdot A + B^2$

(iii) $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - A\cdot B + B\cdot A - B^2$

Los resultados son diferentes, puesto que en general el producto de matrices no es Conmutativo.

Expresiones de grado tres

Aquí sólo trabajaremos con las matrices.

(i) $(A+B)^3 = A^3 + A^2\cdot B + B\cdot A^2 + A\cdot B\cdot A + B^2\cdot A + A\cdot B^2 + B\cdot A\cdot B + B^3$

(ii) $(A-B)^3 = A^3 - A^2\cdot B - B\cdot A^2 - A\cdot B\cdot A + B^2\cdot A + A\cdot B^2 + B\cdot A\cdot B - B^3$

Se deja al lector desarrollar:

(i) $(A+B)^3 = \ ?$

(ii) $(A-B)^3 = \ ?$

(iii) $(A+B)(A^2 - A\cdot B + B^2) = \ ?$

(iv) $(A-B)(A^2 + A\cdot B + B^2) = \ ?$

Ejercicios adicionales al capítulo

(1) Dadas las matrices:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Completar la igualdad (debe aplicar todas las propiedades) y luego comprobarlas numéricamente con esas matrices:

(i) $[\,(D^{-2})^{t}\,(D^{-1}\cdot E^{t})^{-t}\,]^{-t} = ?$

(ii) $(D^{-1})^{t}\cdot(E^{-1}+D)^{t}\cdot(E^{-1})^{-t} = ?$

(iii) $[\,(D^{-1}\cdot E^{t})^{-2}\,(E^{-t}\cdot D\;)^{-1}\,]^{-t} = ?$

(iv) $[\,(D^{t}\cdot E^{-1})^{-t}\cdot\;E^{2t}\,]^{-t} = ?$

(2) Escriba dos matrices M y N de orden dos y muestre que:

(i) $(M+N)^2 \neq M^2 + 2(M\cdot N) + N^2$

(ii) $(M-N)^3 \neq M^3 - 3M^2\cdot N + 3M\cdot N^2 - N^3$

(iii) $(M+N)(M-N) \neq M^2 - N^2$

(3) Con las matrices del numeral 7.1.2 calcular:

(i) $D^{3/2} = ?$

(ii) $E^{2/3} = ?$

(iii) $F^{3/4} = ?$

(iv) $H^{3/2} = ?$

(v) $L^{2/3} = ?$

(4) Probar por Inducción Matemática que si A es una matriz Invertible, entonces A^n también es Invertible y se tiene que:

$$A^{-n} = (A^n)^{-1}$$

CAPÍTULO 8

OPERACIONES O TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Comentario

Existen tres tipos de Operaciones o Transformaciones Elementales, las cuales se aplican a las filas o columnas de una matriz. Por comodidad visual y operacional, en casi todos los temas donde se aplican las Operaciones Elementales, lo haremos sobre las filas. “Los pintores de paisajes se guían por medio de la línea del horizonte”

Tipos de operaciones o transformaciones elementales

Vamos a definir las Operaciones Elementales sobre filas y/o columnas de una matriz y a la vez tomamos la matriz A para los respectivos ejemplos:

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Tipo (1). Multiplicar una fila o una columna de la matriz por un número real no nulo.

Ejemplo 1. Multiplicar la segunda fila de la matriz A por -3.

La fila dos de A se cambia por -3 veces la fila dos y la notamos:

$f_2 \longrightarrow (-3)\, f_2$ -3 -9 6 3 la nueva segunda fila de la matriz que llamaremos A_1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ -3 & -9 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Multiplicar la tercera columna por 1/2

$c_3 \longrightarrow (1/2)\, c_3$ Obtenemos la nueva matriz A_2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Tipo (2). Intercambiar dos filas o dos columnas.

Ejemplo 3. Intercambiamos las filas dos y tres.

Notación: $f_2 \longleftrightarrow f_3$ resulta la nueva matriz A_3:

$$A3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. Intercambiar las columnas dos y cuatro.

Se obtiene la matriz A_4:

Notación: $c_2 \longleftrightarrow c_4$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tipo (3). Cambiar una fila o una columna por la suma de ella más otra o un múltiplo de ésta.

Ejemplo 5. Cambiar la tercera fila por la suma de ella más dos veces la primera.

Notación: $f_3 \longrightarrow f_3 + 2f_1$

$$\begin{array}{rrrrr} & 4 & 2 & 0 & -2 \\ + & 2 & -2 & 8 & 12 \\ \hline & 6 & 0 & 8 & 10 \end{array}$$

resulta la matriz A_5:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 6 & 0 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6. Cambiar la segunda columna por la suma de ella más tres veces negativa la primera.

Notación: $c_2 \longrightarrow (-3)c1 + c_2$

$$\begin{array}{ccc|c} & -6 & -1 & -7 \\ + & -3 & 3 & 0 \\ & -12 & 2 & -10 \end{array}$$

resultando la matriz A_6:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 4 & -10 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrices Equivalentes o Semejantes

Definición:

Si a una matriz A se le aplica una Operación Elemental, la matriz resultante B es Equivalente a la matriz A y se nota: A ~ B

También se dice que la matriz B es equivalente a la matriz A, ya que podemos aplicar la Transformación Elemental con el inverso aditivo o multiplicativo utilizado para obtener la matriz B.

De los ejemplos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 concluimos que:

(1) $A \sim A_1$ (2) $A \sim A_2$ (3) $A \sim A_3$

(4) $A \sim A_4$ (5) $A \sim A_5$ (6) $A \sim A_6$

Matriz elemental

Definición:

Matriz Elemental es la que se obtiene de la matriz Identidad operando sobre ella una Operación Elemental.

Ejemplos: Obtenga tres matrices Elementales de orden cuatro, utilizando cada una de las transformaciones elementales:

Con la matriz Identidad :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1. $f_3 \longrightarrow (-3)f_3$ $\quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2. $c_4 \longleftrightarrow c_2$ $\quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo 3. $f_2 \longrightarrow f_2 + 5f_3$ $\quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rango de una matriz

Comentario

Existe una definición de Rango de una matriz que dice: es el mayor número de filas o de columnas linealmente independiente, pero como nuestro curso es introductorio manejaremos el rango utilizando las transformaciones elementales.

Concepto de rango de una matriz

Dada una matriz Diagonal de orden n, decimos que el rango de A = rango(A) = R(A) es el número de componentes de su diagonal diferentes de cero.

Ejemplos:

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Concluimos que:

rango(A) = 4, rango(B) = 2 y rango(C) = 2

En el caso particular de las matrices Identidad, el rango es igual al orden de la matriz; como por ejemplo, para I_2 su rango es igual a 2, para I_3 se tiene que rango (I_3) = 3 y así, en general, para In tenemos que rango(I_n) = n. Esto nos permite trabajar con las transformaciones elementales sobre cualquier matriz para luego llevarla a una matriz Identidad en el caso particular de las matrices cuadradas.

Si la matriz no es cuadrada, debemos obtener en ella la matriz Identidad de mayor orden posible y en las demás componentes obtener ceros, este tema corresponde a la Partición de matrices, pero pensamos que no es necesario aplicarla en forma estricta.

Ejemplo 1.

Trabajemos con las matrices A, B y C del ejemplo anterior.

Para la matriz A, aplicamos simultáneamente las siguientes Operaciones Elementales:

$f_1 \longrightarrow (1/3)\, f_1$, $f_2 \longrightarrow (-1/2)\, f_2$, $f_3 \longrightarrow (1/4) f_3$ y $f_4 \longrightarrow (1/5)\, f_4$

obtenemos la matriz Identidad de orden 4.

Para la matriz B, aplicamos primero las siguientes Transformaciones Elementales:

$f_2 \longrightarrow (1/2)\ f_2$ y $f_3 \longrightarrow (1/3)\ f_3$, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ahora, aplicamos c1 $\longleftrightarrow$ c2 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ahora, aplicamos c2 $\longleftrightarrow$ c3 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ahora, aplicamos f1 $\longleftrightarrow$ f2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ahora, aplicamos f2 $\longleftrightarrow$ f3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Aquí, observamos una matriz Identidad de orden 2.

El proceso realizado con la matriz B es el que vamos a aplicar a las matrices que no sean cuadradas.

De aquí en adelante, vamos a numerar las Transformaciones Elementales utilizando en cada una de ellas la palabra Iteración.

Para la matriz C:

(i) iteración: f1 $\longrightarrow$ (1/5) f1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) iteración: f2 $\longrightarrow$ (-1) f2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2.

Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & -4 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad Z = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \\ -7 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Solución:

(1) Sobre la matriz X, aplicamos las siguientes Operaciones Elementales:

(i) iteración: $f_3 \longrightarrow f_3 + f_1$ $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) iteración: $f_2 \longrightarrow -2f_1 + f_2$ $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) iteración: $f_1 \longrightarrow f_1 + f_2$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) iteración: $f_1 \longrightarrow 1/2\ f_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(v) iteración: $f_2 \longrightarrow 1/3\ f_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(vi) iteración: $c_3 \longrightarrow 2/3\, c_2 + c_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(vii) iteración: $c_4 \longrightarrow -1/2\, c_1 + c_4$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(viii) iteración: $c_4 \longrightarrow c_4 + c_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

por lo tanto rango(X) = 2

(2) Ahora realizamos sobre la matriz Y las siguientes transformaciones elementales:

(i) iteración: $f_5 \longrightarrow f_5 + f_3$ $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & -4 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) iteración: $f_4 \longrightarrow 2f_1 + f_4$ $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) iteración: $f_2 \longrightarrow -4f_1 + f_2$ $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 14 \\ 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) iteración: $f_3 \longrightarrow -2f_1 + f_3$ $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 14 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(v) iteración: $c_2 \longrightarrow -2c_3 + c_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -17 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(vi) iteración: $f_2 \longrightarrow -14f_3 + f_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(vii) iteración: $f_1 \longrightarrow 2f_3 + f_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(viii) iteración: $f_2 \longrightarrow -1/17\ f_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ix) iteración: $f_1 \longrightarrow -f_2 + f_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Por lo tanto, tenemos que: rango(Y) = 3

Se deja al estudiante el cálculo del rango de la matriz Z.

Diagonalización de matrices simétricas

Comentario

En el presente texto, sólo aprenderemos a diagonalizar matrices Simétricas, ya que hacerlo en matrices que no sean Simétricas requiere bases de álgebra lineal que no están al alcance del lector de este texto. Diagonalizaremos matrices Simétricas utilizando Transformaciones Elementales sobre las filas y Matrices Elementales.

Pasos para diagonalizar una matriz simétrica

Dada la matriz $S = (s_{ij})_{nxn}$, tal que $S = S^t$ y la matriz Identidad del mismo orden, operamos la transformación elemental sobre la fila, de tal manera que obtengamos un cero por debajo de la diagonal principal (i>j) de la matriz S.

Esa misma operación elemental se aplica a la matriz Identidad para obtener la matriz Elemental que utilizaremos de la siguiente manera:

Paso 1. Se multiplica la matriz Elemental por la matriz S a izquierda, el resultado de este producto es la matriz Equivalente que se obtiene de S aplicándole la misma transformación elemental.

Paso 2. En este paso calculamos el cero simétrico al paso 1, es decir, por encima de la diagonal. El cero se obtiene multiplicando por la transpuesta de la matriz Elemental anterior, por la matriz resultante del paso 1, a derecha. La matriz calculada en este paso debe ser Simétrica.

Estos pasos se repetirán las veces que sean necesarias.

Ejemplo:

Dadas las matrices $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Diagonalizar la matriz S utilizando Transformaciones y matrices Elementales.

Primero construimos la teoría y luego damos los dos pasos:

(i) iteración: $f_2 \longrightarrow -3f_1 + f_2$

	en la matriz S			en la matriz I3		
	-3	-9	-6	-3	0	0
+						
	3	1	-1	0	1	0
	0	-8	-7	-3	1	0

Paso 1.

$$\underset{E_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{S}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}} = \underset{S_1}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -8 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}}$$

Paso 2.

$$\underset{S_1}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -8 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}} \cdot \underset{(E_1)^t}{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{S_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -7 \\ 2 & -7 & 4 \end{bmatrix}}$$

Como la matriz S_2 es Simétrica, podemos aplicarle nuevamente la teoría anterior.

(ii) iteración: $f_3 \longrightarrow -2f_1 + f_3$

	en la matriz S_2			en la matriz I_3		
	-2	0	-4	-2	0	0
+						
	2	-7	4	0	0	1
	0	-7	0	-2	0	1

Paso 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -7 \\ 2 & -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\quad E_2 \qquad\qquad\qquad S_2 \qquad\qquad\qquad S_3$$

Paso 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\quad S_3 \qquad\qquad\qquad (E_2)^t \qquad\qquad\qquad S_4$$

Volvemos aplicar los dos pasos a la matriz S_4 :

(iii) iteración: $f_3 \longrightarrow -7/8f_2 + f_3$

	en la matriz S_4			en la matriz I_3		
+	0	7	49/8	0	-7/8	0
	0	-7	0	0	0	1
	0	0	49/8	0	-7/8	1

Paso 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7/8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 49/8 \end{bmatrix}$$

$$\quad E_3 \qquad\qquad\qquad S_4 \qquad\qquad\qquad S_5$$

Paso 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 49/8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 49/8 \end{bmatrix}$$

$$\quad S_5 \qquad\qquad\qquad (E_3)^t \qquad\qquad\qquad D$$

Las tres transformaciones elementales aplicadas a la matriz S , se resumen mediante la siguiente ecuación:

Ecuación de diagonalización.

$$(E_3 \cdot E_2 \cdot E_1) \cdot S \cdot [(E_1)^t \cdot (E_2)^t \cdot (E_3)^t)] = D \quad (1)$$

$$\vdots$$

$$(E_3 \cdot E_2 \cdot E_1) \cdot S \cdot (E_3 \cdot E_2 \cdot E_1)^t = D \quad (2)$$

El lector debe comprobar la equivalencia de las igualdades (1) y (2) utilizando las propiedades.

Comprobemos la igualdad (2) del ejemplo :

$$E_3 \cdot E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7/8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -7/8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -7/8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5/8 & -7/8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5/8 & -7/8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 49/8 \end{bmatrix}$$

$$(E_3 \cdot E_2 \cdot E_1) \cdot S \cdot (E_3 \cdot E_2 \cdot E_1)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 49/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5/8 \\ 0 & 1 & -7/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 49/8 \end{bmatrix} = D$$

Nota: Observe que los productos de las matrices elementales multiplicadas a izquierda por la matriz Simétrica nos da como resultado los ceros por debajo de la diagonal (Lo que buscamos en el paso1.), y por lo tanto, al calcular su transpuesta, multiplicada a derecha, resultan los ceros por encima de la diagonal. (Lo que buscamos en el paso 2.)

En general, dada la matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$, tal que $A = A^t$ y la matriz Identidad del mismo orden, tenemos que:

Ecuación General de Diagonalización.

$(E_m \cdot E_{m-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1) \cdot A \cdot (E_m \cdot E_{m-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1)^t = B$, donde B es una matriz Diagonal.

De la Ecuación General de Diagonalización concluimos que fueron necesarias m Transformaciones Elementales para diagonalizar la matriz A. Por lo tanto, el número de Operaciones Elementales que se necesitan para diagonalizar una matriz Simétrica es a lo más el número de componentes que tiene la matriz debajo de la diagonal.

Ejercicios adicionales al capítulo

(1) Diga si las siguientes matrices son Elementales. En caso afirmativo, busque la Transformación Elemental aplicada :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) (i) Calcular el rango de las matrices del ejercicio 1.

(ii) Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & 4 & -10 \\ 2 & 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & -6 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(3) Utilizando matrices y Transformaciones Elementales, diagonalice las siguientes matrices, escribiendo en cada caso la Ecuación de Diagonalización:

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 9

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Comentario

En el capítulo 6. calculamos determinantes para matrices de orden dos, con el fin de hallar la Inversa de esas matrices y completar el Álgebra de Matrices. Ahora vamos a generalizar este concepto.

Definición

Definamos el conjunto de todas las matrices de orden n con componentes reales (Complejos para los programas que tenga esas bases) así:

(I) $M_n(r)$= { A/A es una matriz, ord(A)= n y sus componentes números reales }

(II) $M_n(c)$ ={ A/A es una matriz, ord(A)= n y sus componentes números complejos }

Definición.

Para darle un poco de matemáticas modernas, definimos determinante de una matriz por medio de una función, ya que algunos autores hablamos de Función Determinante.

Defincíón. (I) det : $M_n(r) \longrightarrow R$

$A \longrightarrow \det(A)$

Definición.(II) det : $M_n(c) \longrightarrow C$

$A \longrightarrow \det(A)$

Teorema de Unicidad.(9.1)

El determinante de una matriz es único, es decir, dada la matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$, si det (A) = p y det (A) = q, entonces p = q.

Propiedades:

(1) El determinante de una matriz que tenga una fila o una columna de ceros es cero.

Ejemplo 1:

Si $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$, entonces $\det(B) = 0$, porque las componentes de la tercera fila son ceros.

Ejemplo 2:

Si $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, su determinante es cero, porque la tercera columna está formada por ceros.

(2) El determinante de una matriz que tenga dos filas o dos columnas iguales, vale cero.

Ejemplo 1:

Dada la matriz $E = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, calcular su determinante.

Solución:

$\det(E) = 0$, porque la columna 1 es igual a la columna 3.

Nota: Utilizando la misma notación que manejamos en las transformaciones elementales, escribiremos el porqué del resultado del ejemplo anterior, así:

$$\det(E) = 0, \quad \text{porque:} \quad c_1 = c_3$$

Ejemplo 2:

Calcular $\det(F) = ?$, para la matriz $F = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

Solución:

$\det(F) = 0$, porque: $f_2 = f_4$

(3) El determinante de una matriz que tenga una fila o una columna múltiplo de otra, vale cero.

Ejemplo 1:

Si la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 15 \end{bmatrix}$ entonces, su determinante es

cero, o sea, det (D) = 0, porque: $f_1 = 3f_3$

Ejemplo 2:

Dada la matriz $K = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & -3/2 \\ 4 & -5 & -2 & -1 \\ 6 & -2 & 5 & 5/2 \end{bmatrix}$

¿Cuánto vale su determinante?

Solución: det (K) = 0, porque: $2c_4 = c_3$

(4) El determinante de una matriz que tenga una fila o una columna igual a la suma de otras dos o múltiplos de ellas, vale cero.

Ejemplo 1:

Si $R = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ entonces, det (R) = 0, porque: $f_1 = f_2 + f_3$

Ejemplo 2:

Si $S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 7 & -3 \end{bmatrix}$ entonces, det (S) = 0, porque:

$c_3 = c_1 + 2c_2$

(5) El determinante de una matriz Diagonal o una matriz Triangular (Superior o Inferior) es igual al producto de las componentes de la diagonal.

Ejemplo 1:

Para una matriz $K = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ tenemos que:

det (K) = (5) (-2) (-3) (-4) = -120, porque K es una matriz Diagonal.

Ejemplo 2:

Para una matriz $T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ tenemos que:

det (T) = (2) (-2) (3) (-3) (4) = 144, porque T es una matriz Triangular Inferior.

(6) El determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta, es decir,

Dada la matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$ se tiene que: det (A) = det (A^t)

Ejemplo:

Si $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ entonces, su transpuesta es $B^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

y tenemos que: det (B) = (3) (-2) - (-2) (5) = 4 y

det (B^t) = (3) (-2) - (-2) (5) = 4; por lo tanto,

det (B) = det (B^t)

(7) El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de cada matriz, es decir,

Si $A = (a_{ij})_{nxn}$ y $B = (b_{ij})_{nxn}$ se tiene que:

$$\det (A \cdot B) = \det (A) \cdot \det (B) = \det (B \cdot A)$$

En general:

$\det(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdot \det(A_3) \cdot ... \cdot \det(A_n)$

Ejemplo:

Si $\quad X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad$ y $\quad Y = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Veamos que: $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y) = \det(Y \cdot X)$

Solución: $\det(X) = (3) \cdot (-4) - (-2) \cdot (4) = -4$

$\det(Y) = (5) \cdot (3) - (-2) \cdot (4) = 7$

$\det(X) \cdot \det(Y) = (-4) \cdot (7) = -28$

Ahora,

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -18 \\ 28 & -28 \end{bmatrix}$$

$\det(X \cdot Y) = (19) \cdot (-28) - (-18)(28) = -19(28) + 18(28)$

$= 28(-19 + 18) = 28(-1) = -28$; por lo tanto,

$\det(X \cdot Y) = -28 = \det(X) \cdot \det(Y)$

Para

$$Y \cdot X = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$$

$\det(Y \cdot X) = 8 - 36 = -28$

8) El determinante de una matriz elevada a una potencia es igual al determinante de la matriz elevado a dicha potencia, o sea,

Ejemplo 1:

Utilizando las matrices X y Y del ejemplo anterior, calcular:

(i) $\det(X^4) = ?$

(ii) $\det(Y^3) = ?$

(iii) $\det(X^3 \cdot Y^2) = ?$

(iv) $\det(X^{-2} \cdot Y^3) = ?$

(v) $\det(X^4 \cdot Y^{-2}) = ?$

Solución:

Para trabajar, aplicando la ley natural del menor esfuerzo, tenemos que:

(i) $\det(X^4) = [\det(X)]^4 = (-4)^4 = 256$

(ii) $\det(Y^3) = [\det(Y)]^3 = (7)^3 = 343$

(iv) $\det(X^{-2} \cdot Y^3) = \det(X^{-2}) \cdot \det(Y^3)$

$= [\det(X)]^{-2} \cdot [\det(Y)]^3$

$= (-4)^{-2} \cdot (7)^3 = 343/16$

Se deja al lector la solución de (iii) y (v).

Ejemplo 2:

Dada las matrices $P = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

Completar y comprobar las siguientes igualdades:

(i) $\det(P^2) = ?$

(ii) $\det(Q^{-3}) = ?$

(iii) $\det(Q^2 \cdot P^3) = ?$

(iv) $\det(P^3 \cdot Q^{-2}) = ?$

(v) $\det(P^{-2} \cdot Q^3) = ?$

Solución:

(i) Primero completamos la igualdad: $\det(P^2) = [\det(P)]^2$

Ahora, la comprobamos:

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$\det(P) = -20 + 12 = -8$; $\det(P^2) = 52 + 12 = 64$

$$\det(P^2) = 64$$

$$[\det(P)]^2 = (-8)\,2 = 64$$

(iv) Completamos la igualdad:

$$\det(P^3 \cdot Q^{-2}) = \det(P^3) \cdot \det(Q^{-2})$$

$$= [\det(P)]^3 \cdot [\det(Q)]^{-2}$$

Operaciones para la primera igualdad:

$$P^3 = P \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & -54 \\ 18 & -53 \end{bmatrix}$$

$\det(P^3) = -1484 + 972 = -512$

$Q^{-1} = ?$

$\det(Q) = -12 + 10 = -2$; $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix}$

$$Q^{-2} = Q^{-1} \cdot Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 5/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$\det(Q^{-2}) = -3/8 + 5/8 = 1/4$

$$\det(P^3) \cdot \det(Q^{-2}) = (-512)\,(1/4) = -128$$

Operaciones para la segunda igualdad:

$$[\det(P)]^3 = (-8)\,3 = -512$$

$$[\det(Q)]^{-2} = (-2)\,-2 = \frac{1}{(-2)^2} = 1/4 \quad \text{por lo tanto :}$$

$$[\det(P)]^3 \cdot [\det(Q)]^{-2} = (-512)\,(1/4) = -128$$

Finalmente, operaciones de donde partimos:

$$\det(P^3 \cdot Q^{-2}) = ?$$

$$P^3 \cdot Q^{-2} = \begin{bmatrix} 28 & -54 \\ 18 & -53 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 5/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -51/2 & -1/2 \\ -157/4 & 17/4 \end{bmatrix}$$

$$\det(P^3 \cdot Q^{-2}) = -867/8 - 157/8 = -128$$

Nota: El lector debe analizar cuál de los caminos utilizados requiere menor esfuerzo.

Teniendo en cuenta esta nota , se deja al estudiante calcular los ejercicios (ii) , (iii) y (v).

(9) El determinante de una matriz que se obtenga de otra multiplicando una fila o una columna por un número real (complejo) , distinto de cero, se altera de acuerdo con dicho número.

Ejemplo:

Dada la matriz: $F = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

Obtenga dos matrices Equivalentes mediante las siguientes Operaciones Elementales, calcule sus determinantes y compárelos con el determinante de la matriz F :

$$\text{(i)} \quad f_1 \to 5f_1 \qquad\qquad \text{(ii)} \quad c_3 \to -3c_3$$

Solución:

(i) La matriz Equivalente F_1 a la matriz F mediante la Operación Elemental $f_1 \to 5f_1$ tendrá como primera fila las componentes 20 y -10; por lo tanto:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

y det (F1) = (20) • (-5) - (-10) • (3)

= -100 + 30 = -70

Ahora, det (F) = (4) • (-5) - (-2) • (3)

= -20 + 6 = -14

De esto concluimos que: det (F_1) = 5 det (F), o sea,

det (F) = 1/5 det (F_1)

(ii) Para la Operación Elemental la nueva segunda columna de la matriz F_2, Equivalente a la matriz F, tendrá como componentes 6 y 15, es decir,

$$F_2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$

y det (F_2) = (4) • (15) - (6) • (3) = = 60 – 18 = 42;

esto significa que det (F_2) = -3 det (F) ; por lo tanto,

det (F) = -1/3 det (F_2)

(10) El determinante de una matriz que se obtenga de otra intercambiando dos filas o dos columnas cambia de signo.

Ejemplo.

Dada la matriz: $M = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

(i) Calcular el determinante de la matriz M_1, Equivalente a la matriz M mediante la siguiente Operación Elemental y compárelo con el determinante de la matriz M :

$$f_1 \leftrightarrow f_2$$

(ii) Calcular el determinante de la matriz M_2, Equivalente a la matriz M mediante la siguiente Operación Elemental y compárelo con el determinante de la matriz M :

$$c_1 \leftrightarrow c_2$$

Solución:

(i) Aplicando $f_1 \leftrightarrow f_2$ a la matriz M, obtenemos:

$$M_1 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \text{; con } \det(M_1) = 6 - 15 = -9$$

$\det(M) = 15 - 6 = 9$, entonces

$\det(M) = -\det(M_1)$

(ii) Obtenemos $M_2 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ de acuerdo con la Operación

Elemental $c_1 \leftrightarrow c_2$ y $\det(M_2) = 6 - 15 = -9$, o sea,

$\det(M) = -\det(M_2)$

11) El determinante de la matriz que se obtenga de otra cambiando una fila o una columna por la suma de ella más otra o un múltiplo de ésta, no se altera.

Ejemplo:

Dada la matriz: $X = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

Calcular el determinante de las matrices Equivalente a X mediante las siguientes Transformaciones Elementales y compárelos con el determinante de la matriz X :

$$\text{(i)} \quad f_2 \rightarrow f_2 + 5f_1 \qquad \text{(ii)} \quad c_1 \rightarrow -4c_2 + c_1$$

Solución:

(i) Sea $X_1 = ?$ la matriz equivalente a la matriz X, mediante la Operación Elemental:

$$f_2 \rightarrow f_2 + 5f_1$$

$$\begin{array}{rrr} & 4 & -3 \\ + & 30 & -15 \\ \hline & 34 & -18 \end{array} \quad \text{, luego}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 34 & -18 \end{bmatrix} \text{, con } \det(X_1) = -108 + 102 = -6$$

$$\det(X) = -18 + 12 = -6, \text{ o sea,}$$

$$\det(X) = \det(X_1)$$

(ii) Sea $X_2 = ?$ la matriz equivalente a la matriz X, mediante la operación Elemental:

$$c_1 \rightarrow -4c_2 + c_1$$

$$\begin{array}{rrr|r} & 12 & 6 & 18 \\ + & & & \\ & 12 & 4 & 16 \end{array} \quad \text{, luego}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 18 & -3 \\ 16 & -3 \end{bmatrix} \text{, con } \det(X_2) = -54 + 48 = -6 \text{, por lo tanto,}$$

$$\det(X) = \det(X_2)$$

(12) Linealidad del determinante.

Dada la matriz $A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} + b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} + b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} + b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

obtenemos de ella dos matrices A y B , separando los sumandos de las componentes de la k-ésima columna, así:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

entonces, $\det(A^*) = \det(A) + \det(B)$

Nota: La propiedad es válida para cualquier fila o columna.

Ejemplo:

$$\text{Si} \qquad K = \begin{bmatrix} 3 & -2+5 \\ -4 & -1-5 \end{bmatrix}$$

Calcular $\det(K) = ?$, aplicando la propiedad de Linealidad del Determinante.

Solución:

Obtenemos de la matriz K, dos matrices K_1 y K_2, separando los sumandos de la segunda columna, así:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Veamos que: $\det(K) = \det(K1) + \det(K2)$

$$\det(K) = -18 + 12 = -6$$

$$\det(K\,1) = -3 - 8 = -11$$

$$\det(K\,2) = -15 + 20 = 5 \text{ , luego,}$$

$$\det(K\,1) + \det(K\,2) = -11 + 5 = -6 \quad \text{y por lo tanto, tenemos que :}$$

$$\det(K) = \det(K\,1) + \det(K\,2)$$

Métodos para calcular determinante de una matriz

Vamos a estudiar tres métodos para calcular el determinante de una matriz, que son:

(I) Determinante de una matriz de orden tres:

(i) Repitiendo filas (ii) Repitiendo columnas.

(II) Método de los Ceros o Método Gauss-Jordan.

(III) Métodos de los Cofactores de una fila o una columna.

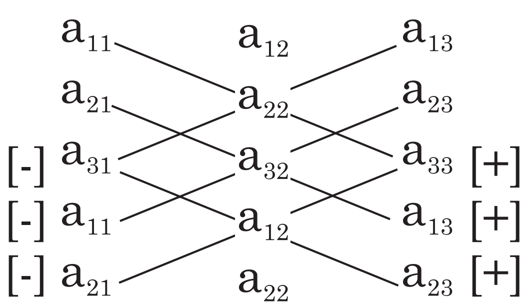
Repitiendo filas o columnas. (sólo para orden tres)

Para estudiar este método utilizaremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(i) Repitiendo Filas.

Construimos el siguiente diagrama:



$$\det(A) = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23}$$

$$- a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{23}\,a_{32}\,a_{11} - a_{33}\,a_{12}\,a_{21}$$

Ejemplo:

Si $\quad H = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ calcular determinante de H.

Solución:

Diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & -2 & 4 & \\ & 3 & 2 & -2 & \\ [-] & 2 & -5 & 5 & [+] \\ [-] & 5 & -2 & 4 & [+] \\ [-] & 3 & 2 & -2 & [+] \end{array}$$

$$\det(H) = (5)(2)(5) + (3)(-5)(4) + (2)(-2)(2)$$

$$- (4)(2)(2) - (-2)(-5)(5) - (5)(-2)(3)$$

$$= 50 - 60 + 8 - 16 - 50 + 30$$

$$= -38$$

(ii) Repitiendo Columnas.

Construimos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ [-] & [-] & [-] & [+] & [+] & [+] \end{array}$$

$$\det(A) = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} \;+\; a_{12}\,a_{23}\,a_{31} \;+\; a_{31}\,a_{21}\,a_{32}$$

$$- a_{13}\,a_{22}\,a_{31} \;-\; a_{11}\,a_{23}\,a_{32} \;-\; a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

Ejemplo 1.

Calcular det (H) = ? Repitiendo columnas.

Solución:

Diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
5 & -2 & 4 & 5 & -2 \\
3 & 2 & -2 & 3 & 2 \\
2 & -5 & 5 & 2 & -5
\end{array}$$

$$[-] \qquad [-] \qquad [-] \qquad [+] \qquad [+] \qquad [+]$$

$$\det(H) = (5)(2)(5) + (-2)(-2)(2) + (4)(3)(-5)$$

$$- (4)(2)(2) - (5)(-2)(-5) - (-2)(3))5)$$

$$= 50 + 8 -60 -16 -50 \; 30$$

$$= -38$$

Ejemplo 2.

Dada la matriz $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5+2 \\ 3 & 1 & -2-3 \\ -5 & 3 & 6-2 \end{bmatrix}$, escriba la propiedad de

Linealidad del Determinante y compruébela.

Solución: De la matriz C sacamos dos matrices E y F , separando el sumando de la tercera columna, así:

$$E = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

, entonces

$$\det(C) = \det(E) + \det(F)$$

se deja al lector el cálculo de los determinantes, repitiendo filas o repitiendo columnas.

APÉNDICE

La solución del determinante para matrices de orden tres, repitiendo filas o repitiendo columnas, es la conclusión o la parte práctica de calcular determinante aplicando la definición, donde intervienen algunos temas especiales que no se han tratado en este texto. Por lo tanto, ilustramos lo más fácil posible esta definición.

Para matrices de orden 2, 3, 4, 5, . . . , n se les asocia los vectores siguientes (los cuales serán las Permutaciones Iniciales):

(1 , 2) para matrices de orden dos.

(1 , 2 , 3) para matrices de orden tres.

(1 , 2 , 3 , 4) para matrices de orden cuatro.

(1 , 2 , 3 , 4 , 5) para matrices de orden cinco.

.
.
.

(1 , 2 , 3 , 4 , 5 , . . . , n) para matrices de orden n.

Número de PERMUTACIONES para cada uno de los vectores iniciales, anteriores:

El primero tiene dos elementos; luego,

(permutaciones) = 2 ! = 1x2 = 2

El segundo tiene tres elementos; por lo tanto,

(permutaciones) = 3 ! = 1x2x3 = 6

El tercero tiene cuatro elementos; por lo tanto;

(permutaciones) = 4 ! = 1x2x3x4 = 24

.
.
.

En general, para conjuntos con n elementos, tenemos que:

(permutaciones) = n ! = 1x2x3x4x5x . . . x n

SIGNO DE UNA PERMUTACIÓN

Los Conjuntos Iniciales se consideran positivos.

(i) Una Permutación es Positiva, si el número de parejas formadas con los elementos del conjunto, donde la primera componente sea mayor que la segunda componente, es par.

(ii) Una Permutación es Negativa, si el número de parejas formadas con los elementos del conjunto, donde la primera componente sea mayor que la segunda, es impar.

Debemos tener en cuenta de que todo número factorial es par y, por lo tanto, vamos a encontrar la mitad de las permutaciones positivas y la otra mitad negativa.

Ejemplo 1.

(1 , 2) positiva.
(2 , 1) negativa.

Ejemplo 2.

(1)	(1 , 2 , 3)	inicial, signo de la permutación 1 =	$\sigma(1) = +$
(2)	(1 , 3 , 2)	parejas: (3,2)	$\sigma(2) = -$
(3)	(2 , 1 , 3)	(2,1)	$\sigma(3) = -$
(4)	(2 , 3 , 1)	(2,1) y (3,1)	$\sigma(4) = +$
(5)	(3 , 1 , 2)	(3,1) y (3,2)	$\sigma(5) = +$
(6)	(3 , 2 , 1)	(3,2), (3,1) y (2,1)	$\sigma(6) = -$

Nota: En el ejemplo 2, vamos a calcular el determinante de una matriz de orden tres, utilizando la definición que expresamos al comienzo del apéndice. Existen tres permutaciones positivas y tres negativas, igual que en los diagramas utilizados en el método de Repitiendo filas o columnas, hay tres productos que se suman y tres productos que se restan, ésta es la forma práctica que mencionamos anteriormente.

Ejemplo 3.

(1)	(1,2,3,4)	Inicial	$\sigma(1) = +$
(2)	(1,2,4,3)	(4,3)	$\sigma(2) = -$
(3)	(1,3,2,4)	(3,2)	$\sigma(3) = -$
(4)	(1,3,4,2)	(3,2) (4,2)	$\sigma(4) = +$
(5)	(1,4,2,3)	(4,2) (4,3)	$\sigma(5) = +$
(6)	(1,4,3,2)	(4,3) (4,2) (3,2)	$\sigma(6) = -$
(7)	(2,1,3,4)	(2,1)	$\sigma(7) = -$

(8)	(2,1,4,3)	(2,1) (4,3)	$\sigma(8) = +$
(9)	(2,3,1,4)	(2,1) (3,1)	$\sigma(9) = +$
(10)	(2,3,4,1)	(2,1) (3,1) (4,1)	$\sigma(10) = -$
(11)	(2,4,1,3)	(2,1) (4,1) (4,3)	$\sigma(11) = -$
(12)	(2,4,3,1)	(2,1) (4,3) (4,1) (3,1)	$\sigma(12) = +$
(13)	(3,1,2,4)	(3,1) (3,2)	$\sigma(13) = +$
(14)	(3,1,4,2)	(3,1) (3,2) (4,2)	$\sigma(14) = -$
(15)	(3,2,1,4)	(3,2) (3,1) (2,1)	$\sigma(15) = -$
(16)	(3,2,4,1)	(3,2) (3,1) (2,1) (4,1)	$\sigma(16) = +$
(17)	(3,4,1,2)	(3,1) (3,2) (4,1) (4,2)	$\sigma(17) = +$
(18)	(3,4,2,1)	(3,2))3,1) (4,2) (4,1) (2,1)	$\sigma(18) = -$
(19)	(4,1,2,3)	(4,1) (4,2) (4,3)	$\sigma(19) = -$
(20)	(4,1,3,2)	(4,1) (4,3) (4,1) (3,2)	$\sigma(20) = +$
(21)	(4,2,1,3)	(4,2) (4,1) (4,3) (2,1)	$\sigma(21) = +$
(22)	(4,2,3,1)	(4,2) (4,3) (4,1) (2,1) (3,1)	$\sigma(22) = -$
(23)	(4,3,1,2)	(4,3) (4,1) (4,2) (3,1) (3,2)	$\sigma(23) = -$
(24)	(4,3,2,1)	(4,3) (4,2) (4,1) (3,2) (3,1) (2,1)	$\sigma(24) = +$

Definición.

Dada la matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$ y las permutaciones asociadas a (1,2,3, . . . ,n) , tenemos que:

$$\det(A) = \sum_{i,j,k,\ldots p=1}^{n} \sigma_{ijk\ldots p}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \ldots a_{np}$$

Ejemplo 1.

Calcular el determinante de la matriz $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\det(B) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \sigma_{ijk}\, b_{1i}\, b_{2j}\, b_{3k}$$

De la teoría anterior, tenemos que:

$$\sigma_{123} = + \quad \text{y} \quad \sigma_{132} = -$$

$$\sigma_{213} = - \quad \text{y} \quad \sigma_{231} = +$$

$$\sigma_{312} = + \quad \text{y} \quad \sigma_{321} = -$$

$$\begin{aligned}
\det(B) = {} & \sigma_{123}\, b_{11}\, b_{22}\, b_{33} + \sigma_{132}\, b_{11}\, b_{23}\, b_{32} + \\
& \sigma_{213}\, b_{12}\, b_{21}\, b_{33} + \sigma_{231}\, b_{12}\, b_{23}\, b_{31} + \\
& \sigma_{312}\, b_{13}\, b_{21}\, b_{32} + \sigma_{321} b_{13}\, b_{22}\, b_{31} \\
= {} & (+)(-2)(-3)(-3) + (-)(-2)(2)(-2) + (-)(5)(4)(-3) \\
& + (+)(5)(2)(5) + (+)(-1)(4)(-2) + (-)(-1)(-3)(5) \\
= {} & -18 - 8 + 60 + 50 + 8 - 15 \\
= {} & 7
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.

Calcular el determinante de $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\det(C) = \sum_{i,j,k,p}^{4} \sigma_{ijkp}\, c_{1i}\, c_{2j}\, c_{3k}\, c_{4p}$$

$\det(C) =$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{1234}\, c_{11}\, c_{22}\, c_{33}\, c_{44} + \sigma_{1243}\, c_{11}\, c22\, c_{34}\, c_{43} + \sigma_{1324}\, c_{11}\, c_{23}\, c_{32}\, c_{44} + \\
& \sigma_{1342}\, c_{11}\, c_{23}\, c_{34}\, c_{42} + \sigma_{1423}\, c_{11}\, c_{24}\, c_{32}\, c_{43} + \sigma_{1432}\, c_{11}\, c_{24}\, c_{33}\, c_{42} + \\
& \sigma_{2134}\, c_{12}\, c_{21}\, c_{33}\, c_{44} + \sigma_{2143} c_{12}\, c_{21}\, c_{34}\, c_{43} + \sigma_{2314}\, c_{12}\, c_{23}\, c_{31}\, c_{44} + \\
& \sigma_{2341}\, c_{12}\, c_{23}\, c_{34}\, c_{41} + \sigma_{2413} c_{12}\, c_{24}\, c_{31}\, c_{43} + \sigma_{2431}\, c_{12}\, c_{24}\, c_{33}\, c_{41} + \\
& \sigma_{3124}\, c_{13}\, c_{21}\, c_{32}\, c_{44} + \sigma_{3142}\, c_{13}\, c_{21}\, c_{34}\, c_{42} + \sigma_{3214} c_{13}\, c_{22}\, c_{31}\, c_{44} + \\
& \sigma_{3241}\, c_{13}\, c_{22}\, c_{34}\, c_{41} + \sigma_{3412}\, c_{13}\, c_{24}\, c_{31}\, c_{42} + \sigma_{3421} c_{13}\, c_{24}\, c_{32}\, c_{41} +
\end{aligned}$$

$\sigma_{4123}\, c_{14}\, c_{21}\, c_{32}\, c_{43} + \sigma_{4132}\, c_{14}\, c_{21}\, c_{33}\, c_{42} + \sigma_{4213}\, c_{14}\, c_{22}\, c_{31}\, c_{43} +$

$\sigma_{4231}\, c_{14}\, c_{22}\, c_{33}\, c_{41} + \sigma_{4312}\, c_{14}\, c_{23}\, c_{31}\, c_{42} + \sigma_{4321}\, c_{41}\, c_{23}\, c_{32}\, c_{41}$

Aplicamos la teoría del ejemplo 3, para colocar el signo de cada una de las permutaciones.

det (C) = (+)(3)(-1)(3)(1) + (-)(3)(-1)(-2)(-2) + (-)(3)(2)(1)(1) +

(+)(3)(2)(-2)(4) + (+)(3)(2)(1)(-2) + (-)(3)(2)(3)(4) +

(-)(2)(5)(3)(1) + (+)(2)(5)(-2)(-2) + (+)(2)(2)(-2)(1) +

(-)(2)(2)(-2)(2) + (-)(2)(2)(-2)(-2) + (+)(2)(2)(3)(2) +

(+)(-1)(5)(1)(1) + (-)(-1)(5)(-2)(4) + (-)(-1)(-1)(-2)(1) +

(+)(-1)(-1)(-2)(2) + (+)(-1)(2)(-2)(4) + (-)(-1)(2)(1)(2) +

(-)(4)(5)(1)(-2) + (+)(4)(5)(3)(4) + (+)(4)(-1)(-2)(-2) +

(-)(-1)(4)(-1)(3) + (-)(4)(2)(-2)(4) + (+)(4)(2)(1)(2)

= - 9 + 12 - 6
- 48 - 12 - 72
- 30 + 40 - 8
+ 16 - 16 + 24
- 5 - 40 + 2
- 4 + 16 + 4
+ 40 + 240 - 16
+ 24 + 64 - 16

= 232

Comentario del autor.

La definición estudiada en el apéndice para solucionar determinante de orden tres es elegante pero para calcular determinante de orden cuatro en adelante, es un trabajo dispendioso, o sea, un poco engorroso. Sin embargo, éste no es un motivo suficiente para que este tema lo tengan totalmente olvidado en muchos textos que estudian la teoría sobre determinante y, por ende, en los programas de las diferentes facultades donde no aparece este tema en el micro-diseño del álgebra lineal.

“El hecho de ser engorroso no significa ignorarlo totalmente.”

Método de los ceros o método Gauss-Jordán

Consiste en obtener el mayor número de ceros, aplicando Transformaciones Elementales sobre las filas o las columnas de la matriz y las propiedades de los determinantes. Sin embargo, acostumbramos a organizar esta teoría obteniendo ceros por debajo o por encima de la diagonal de la matriz, esto es, convirtiendo a la matriz en una matriz Triangular, y a ella se le aplica la respectiva propiedad.

Generalmente, aplicamos Operaciones Elementales sobre las filas de la matriz, por comodidad operacional, esto no quiere decir que no se pueda aplicar las Operaciones Elementales a las columnas de la matriz simultáneamente.

Ejemplo:

Dada las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & -1/2 & 2 & 2 \\ -2 & 1/2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

calcular su determinante por el método de los Ceros.

Solución: $\det(A) = ?$

(1) Iteración: $f_1 \leftrightarrow f_3$ origina $\quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

$\det(A) = (-)\det(A_1)$

(2) Iteración $f_2 \rightarrow -4f_1 + f_2$

$$\begin{array}{rrrr} & -4 & 20 & -24 \\ + & 4 & 2 & -2 \\ \hline & 0 & 22 & -26 \end{array}$$

origina $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 22 & -26 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ det (A) = (-) det (A_2)

(3) Iteración: $f_3 \rightarrow -5f_1 + f_3$

$$\begin{array}{rrrr} & -5 & 25 & -30 \\ + & 5 & -3 & -4 \\ \hline & 0 & 22 & -34 \end{array}$$

origina $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 22 & -26 \\ 0 & 22 & -34 \end{bmatrix}$ det (A) = (-) det (A_3)

(4) Iteración: $f_3 \rightarrow -f_2 + f_3$

$$\begin{array}{rrrr} & 0 & -22 & 26 \\ + & 0 & 22 & -34 \\ \hline & 0 & 0 & -8 \end{array}$$

origina $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 22 & -26 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ det (A) = (-) det (A_4)

det (A) = (-)(1)(22)(-8) = 176

Solución: Para det (D) = ?

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) Iteración: $c_1 \rightarrow -c_2 + c_1$

$$\begin{array}{rrr|r} & 2 & 4 & 6 \\ & -3 & 3 & 0 \\ + & -4 & 5 & 1 \\ & -5 & 3 & -2 \\ & -3 & 2 & -1 \end{array}$$

origina $D_1 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 4 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\det(D) = \det(D_1)$

(2) Iteración: $f_3 \rightarrow f_3 + f_5$

origina $D_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & -4 & 3 \\ -2 & 5 & 4 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\det(D) = \det(D_2)$

(3) Iteración: $f_4 \rightarrow -2 f_5 + f_4$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2 & -6 & 10 & 2 & -8 \\ + & -2 & 5 & 4 & 4 & -2 \\ \hline & 0 & -1 & 14 & 6 & -10 \end{array}$$

origina $D_3 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 14 & 6 & -10 \\ -1 & 3 & -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\det(D) = \det(D_3)$

(4) Iteración: $f_1 \leftrightarrow f_5$

origina $D_4 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 14 & 6 & -10 \\ 6 & -2 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ $\det(D) = (-)\det(D_4)$

(5) Iteración: $f_5 \rightarrow 6f_1 + f_5$

$$\begin{array}{rrrrrr} & -6 & 18 & -30 & -6 & 24 \\ + & 6 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ \hline & 0 & 16 & -27 & 0 & 29 \end{array}$$

origina $D_5 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 14 & 6 & -10 \\ 0 & 16 & -27 & 0 & 29 \end{bmatrix}$ det (D) = (-) det (D_5)

(6) Iteración: $c_2 \rightarrow c_2 + c_3$

origina $D_6 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 13 & 14 & 6 & -10 \\ 0 & -11 & -27 & 0 & 29 \end{bmatrix}$ det (D) = (-) det (D_6)

(7) Iteración: $f_4 \rightarrow 13f_2 + f_4$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 0 & -13 & -52 & -26 & 26 \\ + & 0 & 13 & 14 & 6 & -10 \\ \hline & 0 & 0 & -38 & -20 & 16 \end{array}$$

origina $D_7 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -38 & -20 & 16 \\ 0 & -11 & -27 & 0 & 29 \end{bmatrix}$ det (D) = (-) det (D_7)

(8) Iteración: $f_5 \rightarrow -11f_2 + f_5$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 0 & 11 & 44 & 22 & -22 \\ + & 0 & -11 & -27 & 0 & 29 \\ \hline & 0 & 0 & 17 & 22 & 7 \end{array}$$

origina $D_8 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -38 & -20 & 16 \\ 0 & 0 & 17 & 22 & 7 \end{bmatrix}$ det (D) = (-) det (D_8)

(9) Iteración: $f_3 \rightarrow -\frac{1}{7} f_3$

origina $D_9 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & -38 & -20 & 16 \\ 0 & 0 & 17 & 22 & 7 \end{bmatrix}$

det (D) = (-)(-7) det (D_9) = (7) det (D_9)

(10) Iteración: $f_4 \rightarrow 38f_3 + f_4$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 0 & 0 & 38 & \frac{152}{7} & -\frac{114}{7} \\ + & 0 & 0 & -38 & -20 & 16 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}$$

origina $D_{10} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 12/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 17 & 22 & 7 \end{bmatrix}$

det (D) = (7) det (D_{10})

(11) Iteración: $f_5 \rightarrow -17f_3 + f_5$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 0 & 0 & -17 & -\frac{68}{7} & \frac{51}{7} \\
+ & 0 & 0 & 17 & 22 & 7 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & \frac{86}{7} & \frac{100}{7}
\end{array}
$$

$$
\text{origina} \quad D_{11} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 12/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 86/7 & 100/7 \end{bmatrix}
$$

det (D) = (7) det (D_{11})

(12) Iteración: $f_5 \rightarrow -\frac{43}{6} f_4 + f_5$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 0 & 0 & 0 & -\frac{86}{7} & \frac{43}{21} \\
+ & 0 & 0 & 0 & \frac{86}{7} & \frac{100}{7} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{343}{21}
\end{array}
$$

$$
\text{origina} \quad D_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 12/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 343/21 \end{bmatrix}
$$

det (D) = (7) det (D12) = (7)(-1)(-1)(1)(12/7)(343/21) = 196

Nota: El lector debe observar la insistencia de trabajar con la unidad en las componentes de la diagonal para facilitar la búsqueda de los ceros.

Solución: Para det (E) = ?

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & -1/2 & 2 & 2 \\ -2 & 1/2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Iteración: $f_3 \rightarrow f_3 + f_2$ origina $E_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & -1/2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

det (E) = det (E_1)

(2) Iteración: $f_2 \rightarrow -2f_4 + f_2$

$$\begin{array}{rrrrr} & 4 & -4 & 4 & -2 \\ + & 5 & -1/2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & -9/2 & 6 & 0 \end{array}$$

origina $E_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -9/2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ det (E) = det (E_2)

(3) Iteración: $f_1 \rightarrow -4f_4 + f_1$

$$\begin{array}{rrrrr} & -8 & -8 & 8 & -4 \\ + & 3 & 1 & -1 & 4 \\ \hline & -5 & -7 & 7 & 0 \end{array}$$

origina $E_3 = \begin{bmatrix} -5 & -7 & 7 & 0 \\ 1 & -9/2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ det (E) = det (E_3)

(4) Iteración: $c_2 \leftrightarrow c_3$ origina $E_4 = \begin{bmatrix} -5 & 7 & -7 & 0 \\ 1 & 6 & -9/2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(E) = (-)\det(E_4)$

(5) Iteración: $f_2 \leftrightarrow f_3$ origina $E_5 = \begin{bmatrix} -5 & 7 & -7 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -9/2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(E) = (-)(-)\det(E_5) = \det(E_5)$

(6) Iteración: $f_1 \rightarrow -\dfrac{14}{9} f_3 + f_1$

$$\begin{array}{rcccc} & -\dfrac{14}{9} & -\dfrac{84}{9} & 7 & 0 \\ + & -5 & 7 & -7 & 0 \\ \hline & -\dfrac{59}{9} & -\dfrac{7}{3} & 0 & 0 \end{array}$$

origina $E_6 = \begin{bmatrix} -59/9 & -7/3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -9/2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(E) = \det(E_6)$

(7) Iteración: $f_1 \rightarrow \dfrac{7}{15} f_2 + f_1$

$$
\begin{array}{rcccc}
 & \frac{7}{5} & \frac{7}{3} & 0 & 0 \\
+ & -\frac{59}{9} & -\frac{7}{3} & 0 & 0 \\
\hline
 & -\frac{232}{45} & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

origina $E_7 = \begin{bmatrix} -232/45 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -9/2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(E) = \det(E_7) = (-232/45)(5)(-9/2)(1) = 116$

Se deja al lector calcular $\det(B) = ?$

Método de los Cofactores de una fila o una columna

Definición.

El Cofactor de la componente a_{ij} de la matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$:

Es igual a $(-1)^{i+j}$ por el determinante de la matriz A_{ij} ,donde la matriz A_{ij} se obtiene de la matriz A suprimiéndole la i-ésima fila y la j-ésima columna, es decir,

Cofactor $(a_{ij}) = \operatorname{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

La matriz A_{ij} tiene orden (n-1) x)n-1).

Definición.

Al $\det(A_{ij})$ se le llama Menor de la componente a_{ij} , o sea,

$$\text{Menor}(a_{ij}) = \det(A_{ij})$$

Ejemplo:

Dada La matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix}$

Calcular:

(i) $cof(a_{12}) = ?$ (ii) $cof(a_{23}) = ?$ (iii) $cof(a_{31}) = ?$

(iv) Menor $(a_{13}) = ?$ (v) Menor $(a_{22}) = ?$ (vi) Menor $(a_{32}) = ?$

Solución:

(i) $cof(a_{12}) = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = (-)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$

$= (-)(-24 + 6) = 18$

(ii) $cof(a_{23}) = (-1)^{2+3}$ (-1) 2+3 $\det(A_{23}) = (-)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-)(-3 + 4) = -1$

(iii) $cof(a_{31}) = (-1)^{3+1} \det(A_{31}) = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$

$= 6 - 15 = -9$

(iv) Menor $(a_{13}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10$

(v) Menor $(a_{22}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 10 = -28$

(vi) Menor $(a_{32}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 20 = -29$

Definición.

Matriz de los Cofactores: Es la matriz formada por cada uno de los cofactores de sus componentes, o sea,

Cofactores de la matriz A =

$$\text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} \text{cof}(a_{11}) & \text{cof}(a_{12}) & \cdots & \text{cof}(a_{1n}) \\ \text{cof}(a_{21}) & \text{cof}(a_{22}) & \cdots & \text{cof}(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{cof}(a_{n1}) & \text{cof}(a_{n2}) & \cdots & \text{cof}(a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det(A_{11}) & (-1)^{1+2}\det(A_{12}) & \cdots & (-1)^{1+n}\det(A_{1n}) \\ (-1)^{2+1}\det(A_{21}) & (-1)^{2+2}\det(A_{22}) & \cdots & (-1)^{2+n}\det(A_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det(A_{n1}) & (-1)^{n+2}\det(A_{n2}) & \cdots & (-1)^{n+n}\det(A_{nn}) \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Vamos a calcular la matriz de los cofactores de la matriz A del ejemplo.

$$\text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (+)(-18-3) & (-)(-24+6) & (+)(-4-6) \\ (-)(12+5) & (+)(-18-10) & (-)(-3+4) \\ (+)(6-15) & (-)(-9-20) & (+)(9+8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -21 & 18 & -10 \\ -17 & -28 & -1 \\ -9 & 29 & 17 \end{bmatrix}$$

Definición.

Matriz Adjunta: Es la transpuesta de la matriz de los cofactores y la notamos así:

$$\text{Adjunta de la matriz } A = \text{adj}(A) = [\,\text{Cof}(A)\,]^t$$

Ejemplo:

Continuando con la matriz A del ejercicio anterior, tenemos que:

$$\text{adj}(A) = [\,\text{Cof}(A)\,]^t = \begin{bmatrix} -21 & -17 & -9 \\ 18 & -28 & 29 \\ -10 & -1 & 17 \end{bmatrix}$$

Determinante de A por los cofactores de la i-ésima fila

Es la sumatoria de los productos de las componentes de la i-ésima fila de la matriz A por sus respectivos cofactores, es decir,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \text{cof}(a_{ij})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Determinante de A por los cofactores de j-ésima columna

Es la sumatoria de los productos de las componentes de la j-ésima columna de la matriz A por sus respectivos cofactores, o sea,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ \mathrm{cof}\,(a_{ij})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Ejemplo:

Dada las matrices

$$K = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad N = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Se pide:

(i) det (K) = ? por los cofactores de la segunda fila.

(ii) det (K) = ? por los cofactores de la tercera columna.

(iii) det (N) = ? por los cofactores de cuarta fila.

(iv) det (N) = ? por los cofactores de la segunda fila.

(v) det (K) = ? por los cofactores de la primera columna.

(vi) det (N) = ? por los cofactores de la tercera columna.

Solución:

(i) det (K) = ? por los cofactores de la segunda fila.

$$\det(K) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} \ k_{2j} \ \det(K_{2j})$$

$$= (-1)^{2+1} \ (4) \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \ (5) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \ (-6) \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$$

= (-) (4) (4 + 15) + (5) (6 – 35) + (-) (-6) (9 + 14)

= (-) (4) (19) + (5) (-29) - (-6) (23) = -76 - 145 + 138

= - 83

(v) det (K) = ? por los cofactores de la primera columna.

$$\det(K) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1}\ k_{i1}\ \det(K_{i1})$$

$$= (-1)^{1+1}\ (-3)\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\ (4)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\ (7)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)\,(-10 - 18) - (4)\,(4 + 15) + (7)\,(12 - 25)$$

$$= 84 - 76 - 91$$

$$= -83$$

Nota: En la solución de los próximos ejercicios vamos a aplicar la forma práctica de signos intercalados, ya que se avanza en forma natural en la fila o en la columna.

(iii) det (N) = ? por los cofactores de la cuarta fila.

$$\det(N) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{4+j}\ n_{4j}\ \det(N_{4j})$$

$$= -(4)\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 4 \\ -5 & -2 & 6 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -4 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -(4)\,(72) + (3)\,(-56) - (-1)\,(214) + (-2)\,(-82)$$

$$= -78$$

(vi) det (N) = ? por los cofactores de la tercera columna.

$$\det(N) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+3}\ n_{i3}\ \det(N_{i3})$$

$$= (1)\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\,(166) - (-4)\,(-163) + (-2)\,(-97) - (1)\,(214)$$

$$= 166 - 652 + 194 + 214$$

$$= -78$$

En los ejercicios (iii) y (vi) se deja al estudiante la solución de los determinantes de orden tres (los cuales están entre paréntesis en la penúltima igualdad) repitiendo filas o columnas.

Se deja al lector calcular los determinantes de los ejemplos (ii) y (iv).

Ejercicios adicionales al capítulo

(1) Calcular el determinante de las siguientes matrices, sólo utilizando propiedades:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & -5/2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -5 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 3/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) Mostrar la propiedad de Linealidad del Determinante.

Ayuda: Utilice el método de los cofactores para la k-ésima Columna.

(3) Calcular el determinante de las siguientes matrices por dos métodos diferentes:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3/2 & -1/2 \\ 5 & -2 & -2/3 \\ 4/3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & -2 & -5/2 \\ 4 & -2/3 & -2 \\ -3 & 4 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4/3 \\ -1/2 & 4 & 8 \\ -5 & 5/2 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 4/3 \\ -1/3 & 4 & 8 \\ -5 & 5/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(4) Calcular el determinante de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

(i) Cofactores de la cuarta fila.

(ii) Cofactores de la tercera columna.

(iii) Por el método de los Ceros.

(5) Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

(6) Mostrar que si A es una matriz de orden n y no-singular, se tiene que:

(i) $A \cdot \operatorname{adj}(A) = |A| \cdot I$

(ii) $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) \cdot A$

(iii) $A \cdot \operatorname{adj}(A) = O$, si A es Singular

(7) Mostrar que si A y B son matrices de orden n, entonces:

$$\operatorname{adj}(A \cdot B) = \operatorname{adj}(B) \cdot \operatorname{adj}(A)$$

(8) Mostrar que si A es una matriz de orden n, no-singular, entonces:

(i) $\det[\operatorname{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$

(ii) $\operatorname{adj}[\operatorname{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-2} \cdot A$

(9) Dadas las matrices:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3/2 & -2 \\ 4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 5/2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3/2 \\ 3 & -2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Escójalas y demuestre las igualdades de los ejercicios (6), (7) y (8)

Nota: Con las siguientes nociones de números Complejos proponemos otros ejercicios que no se estudiaron en el desarrollo de la teoría de determinante:

$$x^2 + 1 = 0 \;;\quad x^2 = -1 \;;\quad x = \sqrt{-1} = i$$

$$i = \sqrt{-1},\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i,\quad i^4 = 1$$

$$i^5 = i,\quad i^6 = -1,\quad i^7 = -i,\quad i^8 = 1$$

el ciclo se sigue repitiendo.

Operaciones con los Números Complejos.

En el número complejo: $z = a + bi$, tenemos que:

a es la parte real y **b** la parte imaginaria.

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos, entonces:

(I) Suma: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

(II) Diferencia: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

(III) Producto: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(IV) Cociente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 - d^2 i^2}$$

$$= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i$$

Conjugado de un número complejo.

Conjugado de $z = \overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

(10) Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A = 2\begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 5 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3i & 4+3i \\ -5 & 2i & -4 \\ 4-3i & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2i & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3i & -4i \\ -3 & -i & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 2i & -3i \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2+3i & 5 & -3 & 2i \\ 4 & -2 & 4i & -1 \\ -3i & 4 & -i & 3 \\ 2 & 3i & -1 & -2-3i \end{bmatrix}$$

(11) Si A es una matriz Ortogonal, ¿ cuáles son los valores posibles de det (A) = ?

CAPÍTULO 10

INVERSA DE UNA MATRIZ

Comentario

En el capítulo 6 estudiamos la inversa de una matriz de orden n, pero sólo calculamos la inversa para matrices de orden dos, puesto que en ese momento queríamos completar el Álgebra de matrices y con esas matrices de orden dos resolvimos algunos ejemplos y propusimos otros ejercicios del Álgebra de matrices. Ahora vamos a generalizar esos ejercicios estudiando los diferentes métodos para calcular la inversa de una matriz de orden n.

Métodos para calcular la inversa de una matriz.

Dada la matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, tal det (A) , calculamos su inversa por los siguientes métodos:

Método: donde utilizamos la matriz Adjunta de A; lo que nosotros llamamos, una " FÓRMULA" , puesto que los elementos que la forman ya fueron estudiado en capítulo 9.

Teorema (10.1). Dada la matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, tal que det (A) y su Adjunta, se tiene que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A) \qquad \text{Fórmula (10.1)}$$

Demostración:

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{cof}(a_{11}) & \operatorname{cof}(a_{21}) & \dots & \operatorname{cof}(a_{n1}) \\ \operatorname{cof}(a_{12}) & \operatorname{cof}(a_{22}) & \dots & \operatorname{cof}(a_{n2}) \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \operatorname{cof}(a_{1n}) & \operatorname{cof}(a_{2n}) & \dots & \operatorname{cof}(a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\operatorname{cof}(a_{1j}) & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\operatorname{cof}(a_{2j}) & \ldots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\operatorname{cof}(a_{nj}) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\operatorname{cof}(a_{1j}) & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\operatorname{cof}(a_{2j}) & \ldots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\operatorname{cof}(a_{nj}) \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\operatorname{cof}(a_{1j}) & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\operatorname{cof}(a_{2j}) & \ldots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\operatorname{cof}(a_{nj}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & . & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A| \cdot I$$

Por lo tanto, tenemos que:

$A \cdot \operatorname{adj}(A) = |A| \cdot I$ multiplicando por A^{-1} a izquierda a cada lado, obtenemos:

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot \operatorname{adj}(A) = A^{-1} |A| \cdot I$$

$$\mathrm{I} \cdot \operatorname{adj}(A) = |A| \cdot A^{-1}$$

$$\operatorname{adj}(A) = |A| \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

Nota: Vamos a mostrar con la matriz A de la sección 9.3.3 el resultado aplicado en la demostración del teorema anterior, el porqué de la igualdad det (A) • I

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -21 & -17 & -9 \\ 18 & -28 & 29 \\ -10 & -1 & 17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3)(-21)+(-2)(18)+(5)(-10) & (3)(-17)+(-2)(-28)+(5)(-1) & (3)(-9)+(-2)(29)+(5)(17) \\ (4)(-21)+(3)(18)+(-3)(-10) & (4)(-17)+(3)(-28)+(-3)(-1) & (4)(-9)+(3)(29)+(-3)(17) \\ (2)(-21)+(-1)(18)+(-6)(-10) & (2)(-17)+(-1)(-28)+(-6)(-1) & (2)(-9)+(-1)(29)+(-6)(17) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -149 & 0 & 0 \\ 0 & -149 & 0 \\ 0 & 0 & -149 \end{bmatrix}$$

$$= (-149) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-149) \cdot \mathrm{I}$$

Ejemplo 1. Completamos el ejercicio con la matriz A de la nota.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{149} \cdot \begin{bmatrix} -21 & -17 & -9 \\ 18 & -28 & 29 \\ -10 & -1 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{21}{149} & \frac{17}{149} & \frac{9}{149} \\ -\frac{18}{149} & \frac{28}{149} & -\frac{29}{149} \\ \frac{10}{149} & \frac{1}{149} & -\frac{17}{149} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.

Dada las matrices:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -1 \\ -5 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} , \quad Y = \begin{bmatrix} -2/3 & 1 & 3/4 \\ 1 & -4 & -1 \\ -5/3 & -2 & -3/2 \end{bmatrix} ,$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 5/2 & -4 & 4 \\ 3/2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad y \quad W = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcular la inversa de cada matriz por medio de la Fórmula (10.1).

Solución:

Para la matriz X tenemos que: $X^{-1} = \dfrac{1}{|X|} \cdot \operatorname{adj}(X)$

$$Cof(X) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14 & -18 & -17 \\ -17 & -10 & 9 \\ -10 & -1 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(X) &= (3)(-14) + (-5)(-17) + (-4)(-10) \\ &= -42 + 85 + 40 \\ &= 83 \end{aligned}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{83}\begin{bmatrix} -14 & -17 & -10 \\ -18 & -10 & -1 \\ -17 & 9 & -24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{14}{83} & -\frac{17}{83} & -\frac{10}{83} \\ -\frac{18}{83} & -\frac{10}{83} & -\frac{1}{83} \\ -\frac{17}{83} & \frac{9}{83} & -\frac{24}{83} \end{bmatrix}$$

Solución:

Para la matriz Z tenemos que:

$$Z^{-1} = \frac{1}{|\,Z\,|} \cdot \operatorname{adj}(Z)$$

$$Cof(Z) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5/2 & 4 \\ 3/2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5/2 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 3/2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 5/2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 5/2 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & -9 & 1 \\ 0 & 21/4 & 7/4 \\ -4 & -23/4 & -13/4 \end{bmatrix}$$

$$\det(Z) = (1/2)(-16) + (5/2)(0) + (3/2)(-4) = -8 - 6 = -14$$

$$Z^{-1} = -\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -16 & 0 & -4 \\ -9 & 21/4 & -23/4 \\ 1 & 7/4 & -13/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8/7 & 0 & 2/7 \\ 9/14 & -3/8 & 23/56 \\ -1/14 & -1/8 & 13/56 \end{bmatrix}$$

Se deja al lector los cálculos de las inversas de Y y W.

Teorema.(10.2) Una matriz A de orden n es Invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$

Demostración:

Como la matriz A es Invertible, tenemos por definición de inversa que:

$$(1) \quad A \cdot A^{-1} = I \quad y \quad (2) \quad A^{-1} \cdot A = I$$

Tomemos la primera igualdad y le aplicamos la función determinante:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$$
$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

Por lo tanto, $\det(A) \neq 0$

Ahora, si $\det(A) \neq 0$, entonces la matriz A es Invertible, inmediato del teorema 10.1

Método de los ceros o método Gauss-Jordan

Para estudiar este método necesitamos de la siguiente teoría:

Definición:

Matriz Ampliada: Es construir con dos matrices, una sola matriz, separándolas por un segmento vertical.

Método de los ceros

(a)Aplicando Operaciones Elementales sobre las filas de la Matriz Ampliada.

Sean A una matriz de orden n, tal que $\det(A) \neq 0$ y la matriz Identidad I, del mismo orden.

Construimos la siguiente Matriz Ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] = [A \mid I]$$

Consiste en aplicar Operaciones Elementales sobre las filas de la Matriz Ampliada, de tal manera que se obtenga del lado izquierdo la matriz Identidad y la resultante del lado derecho será la inversa de la matriz A. Advertimos que cuando también se aplican Transformaciones Elementales sobre las filas de una matriz ampliada, se obtienen en cada una de las iteraciones una matriz ampliada equivalente o semejante a la anteriores, así:

$$[A \mid I] \sim [A_1 \mid E_1] \sim [A_2 \mid E_2] \sim \dots \sim [I \mid A^{-1}]$$

Ejemplo 1:

Utilizando el Método de los Ceros o Método Gauss-Jordán, calcular la inversa de la siguiente matriz:

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución:

Utilizando la matriz X y la matriz Identidad del mismo orden, construimos la siguiente matriz ampliada:

$$[X \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(1) Iteración: $f_2 \to 2f_1 + f_2$

$$\begin{array}{rrrr|rrr} & -4 & 2 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ + & 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 4 & -7 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(2) Iteración: $f_1 \rightarrow -\dfrac{1}{2} f_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(3) Iteración: $f_3 \rightarrow -3 f_1 + f_3$

$$\begin{array}{rccc|ccc} & -3 & 3/2 & -9/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ + & 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 1/2 & -13/2 & 3/2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -13/2 & 3/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(4) Iteración: $f_1 \rightarrow f_1 + f_3$

$$\begin{array}{rccc|ccc} & 1 & -1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ + & 0 & 1/2 & -13/2 & 3/2 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -13/2 & 3/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(5) Iteración: $f_3 \rightarrow -\dfrac{1}{8} f_2 + f_3$

$$\begin{array}{rccc|ccc} & 0 & -1/2 & 7/8 & -1/4 & -1/8 & 0 \\ + & 0 & 1/2 & -13/2 & 3/2 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & -45/8 & 5/4 & -1/8 & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -45/8 & 5/4 & -1/8 & 1 \end{array}\right]$$

(6) Iteración: $f_3 \to -\dfrac{8}{45} f_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 1/45 & -8/45 \end{array}\right]$$

(7) Iteración: $f_2 \to 7 f_3 + f_2$

$$\begin{array}{rcccc|cc} & 0 & 0 & 7 & -14/9 & 7/45 & -56/45 \\ + & 0 & 4 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 4 & 0 & 4/9 & 52/45 & -56/45 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4/9 & 52/45 & -56/45 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 1/45 & -8/45 \end{array}\right]$$

(8) Iteración: $f_1 \to 5 f_3 + f_1$

$$\begin{array}{rccc|ccc} & 0 & 0 & 5 & -10/9 & 1/9 & -8/9 \\ + & 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -1/9 & 1/9 & 1/9 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 0 & 4 & 0 & 4/9 & 52/45 & -56/45 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 1/45 & -8/45 \end{array}\right]$$

(9) Iteración: $f_2 \to \dfrac{1}{4} f_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 & 13/45 & -14/45 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 1/45 & -8/45 \end{array}\right]$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz X es:

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 13/45 & -14/45 \\ -2/9 & 1/45 & -8/45 \end{bmatrix}$$

Nota : Recuerde que a cada inversa se le puede comprobar su resultado.

Ejemplo 2:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Utilizando el Método de los Ceros y Operaciones Elementales sobre las filas de la Matriz Ampliada, calcular la inversa de la siguiente matriz :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Solución: Escribimos la Matriz Ampliada, cuando utilizamos Transformaciones Elementales sobre las filas, así :

(1) Iteración:

$$f_1 \leftrightarrow f_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(2) Iteración:

$$f_2 \rightarrow -2\,f_4 + f_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(3) Iteración:

$$f_3 \rightarrow -5f_1 + f_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 14 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(4) Iteración:

$$f_4 \rightarrow -2f_1 + f_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -2 & 16 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

(5) Iteración:

$$f_3 \rightarrow -8f_2 + f_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -2 & 16 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

(6) Iteración:

$$f_4 \rightarrow -3f_2 + f_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -2 & 16 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 13 & -2 & 7 & -3 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

(7) Iteración:

$$f_4 \rightarrow -\frac{13}{30}f_3 + f_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -2 & 16 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -17/15 & 1/15 & 7/15 & -13/30 & 1/6 \end{array}\right]$$

(8) Iteración:

$$f_4 \rightarrow -\frac{15}{17} f_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -2 & 16 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/17 & -7/17 & 13/34 & -5/34 \end{array}\right]$$

(9) Iteración:

$$f_3 \rightarrow 2 f_4 + f_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 270/17 & -150/17 & 30/17 & -90/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/17 & -7/17 & 13/34 & -5/34 \end{array}\right]$$

(10) Iteración:

$$f_3 \rightarrow \frac{1}{30} f_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/17 & -5/17 & 1/17 & -3/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/17 & -7/17 & 13/34 & -5/34 \end{array}\right]$$

(11) Iteración:

$$f_2 \rightarrow -2 f_4 + f_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -32/17 & 31/17 & -13/17 & 5/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/17 & -5/17 & 1/17 & -3/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/17 & -7/17 & 13/34 & -5/34 \end{array}\right]$$

(12) Iteración:

$$f_1 \rightarrow 3 f_4 + f_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -3/17 & -21/17 & 39/34 & 19/34 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -32/17 & 31/17 & -13/17 & 5/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/17 & -5/17 & 1/17 & -3/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/17 & -7/17 & 13/34 & -5/34 \end{array}\right]$$

(13) Iteración:

$$f_2 \rightarrow 4f_3 + f_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -3/17 & -21/17 & 39/34 & 19/34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/17 & 11/17 & -9/17 & -7/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/17 & -5/17 & 1/17 & -3/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/17 & -7/17 & 13/34 & -5/34 \end{array}\right]$$

(14) Iteración:

$$f_1 \rightarrow -f_3 + f_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -12/17 & -16/17 & 37/34 & 25/34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/17 & 11/17 & -9/17 & -7/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/17 & -5/17 & 1/17 & -3/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/17 & -7/17 & 13/34 & -5/34 \end{array}\right]$$

(15) Iteración:

$$f_1 \rightarrow 2f_2 + f_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4/17 & 6/17 & 1/34 & -3/34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/17 & 11/17 & -9/17 & -7/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/17 & -5/17 & 1/17 & -3/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/17 & -7/17 & 13/34 & -5/34 \end{array}\right]$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz Q es:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -4/17 & 6/17 & 1/34 & -3/34 \\ 4/17 & 11/17 & -9/17 & -7/17 \\ 9/17 & -5/17 & 1/17 & -3/17 \\ -1/17 & -7/17 & 13/34 & -5/34 \end{bmatrix}$$

Método de los ceros

Aplicando Transformaciones Elementales sobre las columnas de la siguiente Matriz Ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ . & . & & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & & \dots & 1 & a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{array}\right] = [I \mid A]$$

Consiste en aplicar Operaciones Elementales sobre las columnas de la Matriz Ampliada, de tal manera que se obtenga del lado derecho la matriz Identidad y la resultante del lado izquierdo será la inversa de la matriz A. Recordamos, que igualmente, cuando se aplican Operaciones Elementales sobre las columnas de matriz ampliada, se obtienen matrices ampliadas equivalentes o semejantes a las anteriores, así:

$$\left[I \mid A \right] \sim \left[E_1 \mid A_1 \right] \sim \left[E_2 \mid A_2 \right] \sim \ldots \sim \left[A^{-1} \mid I \right]$$

Se deja al lector calcular la inversa de las matrices X y Q de los ejemplos anteriores, utilizando las Operaciones Elementales sobre las columnas de la matriz ampliada.

Comentario del autor:

Seguramente que al resolver los ejemplos , el lector o estudiante notará las dificultades en la escritura de las operaciones y del efecto visual que estará a la orden del día, por esto, recomendamos utilizar en la solución de ejemplos y en los ejercicios propuestos, la aplicación de las operaciones elementales sobre las filas.

Ejemplo. Calcular la inversa de la matriz $N = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

utilizando operaciones elementales sobre las columnas.

Solución. Para calcular la inversa de la matriz N , utilizando operaciones elementales sobre las columnas, construimos la siguiente matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

(1) Iteración: $c_2 \rightarrow -2c_3 + c_2$

$$\begin{array}{ccc|cccc|c} & 0 & 0 & 0 & & -8 & -2 & -10 \\ + & 0 & 1 & 1 & + & 8 & 5 & 13 \\ & -2 & 0 & -2 & & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 13 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(2) Iteración: $c_1 \rightarrow -3\,c_3 + c_1$

$$\begin{array}{ccc|cccc|c} & 0 & 1 & 1 & & -12 & 3 & -9 \\ + & 0 & 0 & 0 & + & 12 & -1 & 11 \\ & -3 & 0 & -3 & & -3 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & -10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 13 & -4 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(3) Iteración: $c_2 \rightarrow \dfrac{1}{13}\,c_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & -10/13 & 4 \\ 0 & 1/13 & 0 & 11 & 1 & -4 \\ -3 & -2/13 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(4) Iteración: $c_1 \rightarrow -11\,c_2 + c_1$

$$\begin{array}{ccc|cccc|c} & 0 & 1 & 1 & & 110/13 & -9 & -7/13 \\ + & -11/13 & 0 & -11/13 & + & -11 & 11 & 0 \\ & 22/13 & -3 & -17/13 & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/13 & -10/13 & 4 \\ -11/13 & 1/13 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ -17/13 & -2/13 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(5) Iteración: $c_3 \rightarrow 4\,c_2 + c_3$

$$\begin{array}{ccc|cccc|c} & 0 & 0 & 0 & & 40/13 & 4 & 12/13 \\ + & 4/13 & 0 & 4/13 & + & 4 & -4 & 0 \\ & -8/13 & 1 & 5/13 & & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/13 & -10/13 & 12/13 \\ -11/13 & 1/13 & 4/13 & 0 & 1 & 0 \\ -17/13 & -2/13 & 5/13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(6) Iteración: $c_1 \rightarrow -\dfrac{13}{7}c_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -13/7 & 0 & 0 & 1 & -10/13 & 12/13 \\ 11/7 & 1/13 & 4/13 & 0 & 1 & 0 \\ 17/7 & -2/13 & 5/13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(7) Iteración: $c_3 \rightarrow -\dfrac{12}{13}c_1 + c_3$

$$\begin{array}{ccc|cccc|c} & 12/7 & 0 & 12/7 & & -12/13 & 12/13 & 0 \\ + & -132/91 & 4/13 & 8/7 & + & 0 & 0 & 0 \\ & -204/91 & 5/13 & -13/7 & & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -13/7 & 0 & 12/7 & 1 & -10/13 & 0 \\ 11/7 & 1/13 & -8/7 & 0 & 1 & 0 \\ 17/7 & -2/13 & -13/7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(8) Iteración: $c_2 \rightarrow \dfrac{10}{13}c_1 + c_2$

$$\begin{array}{ccc|cccc|c} & 10/13 & -10/13 & 0 & & 10/13 & -10/13 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 & + & 110/91 & 1/13 & 9/7 \\ & 0 & 0 & 0 & & 170/91 & -2/13 & 12/7 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -13/7 & -10/7 & 12/7 & 1 & 0 & 0 \\ 11/7 & 9/7 & -8/7 & 0 & 1 & 0 \\ 17/7 & 12/7 & -13/7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz N es:

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} -13/7 & -10/7 & 12/7 \\ 11/7 & 9/7 & -8/7 \\ 17/7 & 12/7 & -13/7 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones matriciales lineales

Comentario

En el estudio del Álgebra Elemental de números Reales solucionamos ecuaciones lineales de la forma $ax + b = 0$ ó $ax + b = c$, con $a, b, c \in R$ y x la incógnita. Ahora vamos a resolver Ecuaciones con Matrices y la solución de ellas, las comparamos con la solución de las ecuaciones reales, para analizar la diferencia, puesto que el producto de matrices, en general, no es conmutativo y la notación de las matrices en muchos casos es diferente a los de los números reales.

Casos elementales

Caso 1. Ecuación Lineal Real:

$$ax + b = 0 \;,\; ax = -b \;,\; x = -\frac{b}{a} \text{ solución, siempre que } a \neq 0$$

Ecuación Matricial:

$$\begin{aligned} aX + B &= O \\ aX + [B + (-B)] &= O + (-B) \\ aX + O &= -B \\ aX &= -B \\ X &= -\frac{1}{a}B \quad \text{solución,} \end{aligned}$$

$a \in R$, $a \neq 0$, B matriz conocida, O matriz Nula y X la matriz incógnita.

Observamos que la solución es similar, la diferencia radica en la escritura del escalar $\frac{1}{a}$ en la solución de la Ecuación Matricial.(producto de un escalar por una matriz).

Ejemplo 1.

(I) Con reales:

$$3x - 2 = 0 \;,\; 3x = 2 \;,\; x = \frac{2}{3} \quad \text{solución}$$

(II) Con matrices:

Resolver para $X = ?$ la siguiente Ecuación Matricial:

$$3X + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 \\ -4/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{solución}$$

Comprobamos la solución:

$$3X + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 \\ -4/3 & 1/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso 2. Veamos la forma:

Ecuación Real: $ax + b = c$, $ax = c - b$, $x = \dfrac{c - b}{a}$ solución.

Ecuación Matricial:

$aX + B = C$, $a \in R$, $a \neq o$ X matriz incógnita, B y C matrices conocidas.

$$aX + B = C$$

$$aX = C - B$$

$$X = \frac{1}{a}(B - C) \quad \text{solución}$$

Ejemplo 2.

(I) Con reales:

$$5x + 2 = 6$$
$$5x = 6 - 2 = 4$$
$$x = \frac{4}{5} \text{ solución.}$$

(II) Con matrices.

Resolver para $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ la siguiente Ecuación Matricial:

$$4X - \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$4X = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/4 & -7/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 & -7/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \quad \text{solución.}$$

Comprobamos la solución:

$$4X - \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 5/4 & -7/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Caso 3.

A partir de este caso sólo trabajaremos con matrices.

Resolver para $X = ?$ $nX + mA = pB$, donde $n, m, p \in R$, $n \neq o$, A y B matrices dadas.

$$nX = pB - mA$$

$$X = \frac{1}{n}(pB - mA) \quad \text{solución}$$

Conclusión: En los tres casos estudiados el procedimiento algebraico es similar la búsqueda de las soluciones tanto en las ecuaciones reales como en las ecuaciones matriciales, sólo tener cuidado con la escritura del producto de un escalar por una matriz.

Ejemplo 3.

(i) Resolver para $X = ?$ la siguiente Ecuación Matricial:

$$2X - 4\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2X = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} -18 & -16 \\ 7 & -38 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -18 & -16 \\ 7 & -38 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 7/2 & -19 \end{bmatrix} \text{ solución.}$$

Se deja al lector comprobar la solución.

(ii) Resolver para $X = ?$ la siguiente Ecuación Matricial:

$$5X + 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix} = X + 2\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$5X - X = 2\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$4X = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -10 \\ 13 & -14 & -7 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 10 & 3 & -10 \\ 13 & -14 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/2 & 3/4 & -5/2 \\ 13/4 & -7/2 & -7/4 \end{bmatrix} \text{ solución.}$$

Comprobamos la solución:

$$5X + 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= 5\begin{bmatrix} 5/2 & 3/4 & -5/2 \\ 13/4 & -7/2 & -7/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -11 & 20 \\ -7 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13/2 & -29/4 & 15/2 \\ 37/4 & -15/2 & -15/4 \end{bmatrix}$$

$$X + 2\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/2 & 3/4 & -5/2 \\ 13/4 & -7/2 & -7/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -8 & 10 \\ 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13/2 & -29/4 & 15/2 \\ 37/4 & -15/2 & -15/4 \end{bmatrix}$$

Escribimos el ejemplo 2 parte (i) y (ii) reemplazando las matrices por letras, según como aparecen en las respectivas ecuaciones matriciales y buscamos sus soluciones, así:

(i)

$$2X - 4A + 3B = 2I - 5C$$

$$2X = 2I - 5C + 4A - 3B$$

$$X = \frac{1}{2}(2I - 5C + 4A - 3B) \quad \text{solución}$$

(ii)

$$5X + 3D - 4E = X + 2F$$

$$5X - X = 2F + 4E - 3D$$

$$4X = 2F + 4E - 3D$$

$$X = \frac{1}{4}(2F + 4E - 3D) \quad \text{solución.}$$

Estas formas de escritura de las Ecuaciones Matriciales son las que recomendamos cuando se den los ejercicios como aparecen en el ejemplo 2. parte (i) y (ii), ya que así es más cómodo para realizar las operaciones con las matrices, directamente en la solución.

Casos Especiales

Presentamos Ecuaciones Matriciales con coeficientes reales y coeficientes matrices dadas o conocidas.

Caso 4.

$nAX + mB = O$, donde $n, m, \in R$, $n \neq o$, X matriz incógnita, A y B matrices dadas, A coeficiente a izquierda e invertible y O matriz Nula.

$$nAX + mB = O$$

$$n\,A\,X = O - m\,B = -m\,B$$

$$A\,X = \frac{1}{n}\,(-m\,B)$$

$$(A^{-1}\,A)\,X = A^{-1}\left[-\frac{m}{n}(B)\right]$$

$$I\,X = -\frac{m}{n}\,(A^{-1}\,B)$$

$$X = -\frac{m}{n}\,(A^{-1}\,B) \text{ solución.}$$

Ejemplo 4.

Resolver para X = ? la siguiente Ecuación Matricial:

$$\underset{A}{3\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}\underset{X}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}} - 5\underset{B}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}} = \underset{O}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$3\,A\,X - 5\,B = O$$

$$3\,A\,X = 5\,B$$

$$A\,X = \frac{5}{3}\,B$$

$$X = \frac{5}{3}\,(A^{-1}\,B) \text{ solución.}$$

Operaciones :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 2 \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 3/2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 5/6 & 80/3 \\ 5/3 & 15 \end{bmatrix} \text{ solución.}$$

Comprobamos la solución:

$$3\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5/6 & 80/3 \\ 5/3 & 15 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 10 & -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -20 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso 5.

$n\,X\,A + m\,B = O$, donde $n, m \in R$, $n \neq o$, X matriz incógnita, A y B matrices dadas, A coeficiente a derecha e invertible y O matriz Nula.

$$n\,X\,A + m\,B = O$$

$$n\,X\,A = -\,m\,B$$

$$X\,A = -\;B$$

$$X\,(A\;A^{-1}) = -\frac{m}{n}(B\,A^{-1})$$

$$X\;I = -\frac{m}{n}(B\,A^{-1})$$

$$X = -\frac{m}{n}(B\,A^{-1}) \quad \text{solución.}$$

Ejemplo 5.

Resolver para X = ? la siguiente Ecuación Matricial:

$$2\underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}}_{X}\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}}_{D} + 3\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{O}$$

$$2\;X\,D + 3\,A = O$$

$$2\;X\,D = -3\,A$$

$$X D = -\frac{3}{2} A$$

$$X = -\frac{3}{2} (A D^{-1}) \text{ solución.}$$

Operaciones:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \ \det(D) = -3 \quad \text{y} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4/3 \end{bmatrix}$$

$$X = -\frac{3}{2} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4/3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 6 & -15/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{solución.}$$

Se deja al lector probar la solución.

Caso 6.

$n A X + m B = p C$, donde $n, m, p \in R$, $n \neq o$, X matriz incógnita A , B y C matrices dadas y A coeficiente a izquierda e invertible.

$$n A X + m B = p C$$

$$n A X = p C - m B$$

$$A X = \frac{1}{n} (p C - m B)$$

$$(A^{-1} A) X = A^{-1} (p C - m B)$$

$$I X = \frac{1}{n} A^{-1} (p C - m B)$$

$$X = \frac{1}{n} A^{-1} (p C - m B) \quad \text{solución.}$$

Ejemplo 6.

Resolver para X = ? la siguiente ecuación matricial:

$$\underset{B}{3\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}} - 4 \underset{A}{\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}} + 2 \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = 4 \underset{D}{\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{aligned} 3BX - 4A + 2I &= 4D \\ 3BX &= 4D - 2I + 4A \\ BX &= \frac{1}{3}(4D - 2I + 4A) \\ X &= B^{-1}\left[\frac{1}{3}(4D - 2I + 4A)\right] \\ X &= \frac{1}{3}\left[B^{-1}\ (4D - 2I + 4A)\ \right] \text{ solución.} \end{aligned}$$

Operaciones:

$$4D - 2I + 4A = \begin{bmatrix} -18 & 32 \\ 8 & 6 \end{bmatrix},\ \det(B) = -2 \ \text{ y } \ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3/2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3/2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -18 & 32 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -26 & 26 \\ -43 & 36 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -26/3 & 26/3 \\ -43/3 & 12 \end{bmatrix} \text{ solución.}$$

Comprobamos la solución:

$$3\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -26/3 & 26/3 \\ -43/3 & 12 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -18 & 32 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & -16 \\ 8 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 16 \\ 16 & -12 \end{bmatrix}$$

$$= 4\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Caso 7.

$n\,X\,B + m\,A = p\,C$, donde $n, m, p \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, X matriz incógnita, A,B y C matrices dadas y B coeficiente a derecha invertible.

$$n\,X\,B + m\,A = p\,C$$

$$n\,X\,B = p\,C - m\,A$$

$$X\,B = \frac{1}{n}\,(p\,C - m\,A)$$

$$X = \frac{1}{n}\,(p\,C - m\,A)\,B^{-1} \quad \text{solución.}$$

Ejemplo 7.

Resolver para X = ? la siguiente ecuación matricial:

$$2\underset{X}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}} - 3\underset{B}{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}} = 5\underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} - 2\underset{C}{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}$$

$$2\,XA - 3B = 5I - 2C$$

$$2XA = 5I - 2C + 3B$$

$$XA = \frac{1}{2}(5I - 2C + 3B)$$

$$X = \left[\frac{1}{2}(5I - 2C + 3B)\right] A^{-1} \quad \text{solución}$$

Operaciones:

$$5I - 2C + 3B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = -1 \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 18 & -20 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -5/2 & 7/2 \\ 9 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{solución.}$$

Se deja al lector comprobar la solución.

Caso 8.

$nAX + mB = pC + qDX$, donde $n, m, p, q \in R$, X matriz incógnita, A, B, C y D matrices conocidas, A y D coeficientes a izquierda.

$$nAX + mB = pC + qDX$$
$$nAX - qDX = pC - mB$$
$$(nA - qD)X = pC - mB, \text{ si } |nA - qD| \neq 0$$
$$X = (nA - qD)^{-1}(pC - mB) \quad \text{solución.}$$

Ejemplo 8.

Resolver para $X = ?$ la siguiente ecuación matricial:

$$\underset{A}{4\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}\underset{X}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}} - \underset{I}{3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} + \underset{B}{2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{C}{2\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}} + \underset{D}{3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}\underset{X}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}}$$

$$4AX - 3I + 2B = 2C + 3DX$$
$$4AX - 3DX = 2C + 3I - 2B$$
$$(4A - 3D)X = 2C + 3I - 2B \quad , \text{si} \quad |4A - 3D| \neq 0$$
$$X = (4A - 3D)^{-1}(2C + 3I - 2B) \quad \text{solución.}$$

Operaciones :

$$4A - 3D = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad (4A - 3D)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/11 & 3/11 \\ -1/55 & -14/55 \end{bmatrix}$$

$$\text{y} \quad 2C + 3I - 2B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1/11 & 3/11 \\ -1/55 & -14/55 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -19/11 & 27/11 \\ 107/55 & -104/55 \end{bmatrix} \quad \text{solución.}$$

Comprobamos la solución:

$$4\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -19/11 & 27/11 \\ 107/55 & -104/55 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -19/11 & 27/11 \\ 107/55 & -104/55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -561/55 & 1342/55 \\ -1286/55 & 1967/55 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -19/11 & 27/11 \\ 107/55 & -104/55 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -891/55 & 1122/55 \\ -1176/55 & 1527/55 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -561/55 & 1342/55 \\ -1286/55 & 1967/55 \end{bmatrix}$$

Caso 9.

$nAX + mB = pC + qX$, donde $n, m, p, q \in R$, X matriz incógnita, A, B, C y D matrices conocidas, A coeficientes a izquierda.

$$nAX + mB = pC + qX$$

$$nAX - qX = pC - mB$$

$$nAX - qIX = pC - mB$$

$$(nA - qI)X = pC - mB, \quad \text{si} \quad |nA - qI| \neq 0$$

$$X = (nA - qI)^{-1}(pC - mB) \quad \text{solución.}$$

Ejemplo 9.

Resolver para $X = ?$ la siguiente ecuación matricial:

$$2\underset{X}{\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}} + 2\underset{C}{\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}} + 4\underset{B}{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}} = 3\underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} + 3\underset{X}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}}$$

$$2AX + 2C + 4B = 3I + 3X$$

$$2AX - 3IX = 3I - 2C - 4B$$

$$(2A - 3I)X = 3I - 2C - 4B, \quad \text{si} \quad \det(2A - 3I) \neq 0$$

$$X = (2A - 3I)^{-1}(3I - 2C - 4B) \quad \text{solución.}$$

Operaciones :

$$2\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(2A - 3I) = -31 \quad y \quad (2A - 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} -7/31 & 8/31 \\ -4/31 & 9/31 \end{bmatrix}$$

$$3I - 2C - 4B = \begin{bmatrix} -23 & 0 \\ -8 & 15 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} -7/31 & 8/31 \\ -4/31 & 9/31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -23 & 0 \\ -8 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 97/31 & 120/31 \\ 20/31 & 135/31 \end{bmatrix} \text{ solución.}$$

Comprobamos la solución :

$$2\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 97/31 & 120/31 \\ 20/31 & 135/31 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 97/31 & 120/31 \\ 20/31 & 135/31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 384/31 & 360/31 \\ 60/31 & 498/31 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 97/31 & 120/31 \\ 20/31 & 135/31 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 384/31 & 360/31 \\ 60/31 & 498/31 \end{bmatrix}$$

Caso 10.

$n\,X\,A + m\,B = p\,C + q\,X\,D$, donde n, m, p, q $\in$ R, X matriz incógnita, A, B, C y D matrices conocidas, A y D coeficientes a derecha.

$$n\,X\,A + m\,B = p\,C + q\,X\,D$$
$$n\,X\,A - q\,X\,D = p\,C - m\,B$$
$$X\,(n\,A - q\,D) = p\,C - m\,B, \quad \text{si } \left| n\,A - q\,D \right| \neq 0$$

$$X = (p\,C - m\,B)\,(n\,A - q\,D)^{-1} \quad \text{solución.}$$

Ejemplo 10.

Resolver para $X = ?$ la siguiente ecuación matricial:

$$4\underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}}_{X}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} + 5\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{B} - 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} = 2\underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}}_{X}\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}}_{C} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}}_{D}$$

$$4\,XA + 5B - 2I = 2\,XC + D$$
$$4\,XA - 2\,XC = D + 2I - 5B$$
$$X(4A - 2C) = D + 2I - 5B, \quad \text{si } \left| 4A - 2C \right| \neq 0$$

$$X = (D + 2I - 5B)\,(4A - 2C)^{-1} \quad \text{solución.}$$

Operaciones :

$$4A - 2C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(4A - 2C) = -4 \quad \text{y} \quad (4A - 2C)^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$D + 2I - 5B = \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -27/2 & 15/2 \\ 0 & 5/2 \end{bmatrix} \quad \text{solución.}$$

Comprobamos la solución :

$$4\begin{bmatrix} -27/2 & 15/2 \\ 0 & 5/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}+5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -54 & 30 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -102 & 18 \\ 20 & -30 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -99 & 28 \\ 15 & -37 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} -27/2 & 15/2 \\ 0 & 5/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -27 & 15 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -99 & 28 \\ 15 & -37 \end{bmatrix}$$

Caso 11.

$nXA + mB = pC + qX$, donde n, m, p, q $\in$ R , X matriz incógnita, A , B , y C matrices conocidas, A coeficientes a derecha.

$$nXA + mB = pC + qX$$

$$nXA - qXI = pC - mB$$

$$X(nA - qI) = pC - mB \text{ , si } |nA - qI| \neq 0$$

$$X = (pC - mB)(nA - qI)^{-1} \quad \text{solución.}$$

Ejemplo 11.

Resolver para $X = ?$ la siguiente ecuación matricial:

$$2\underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}}_{X}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A}-3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{B}=3\underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}}_{X}+4\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{C}$$

$$2XA - 3B = 3X + 4C$$
$$2XA - 3XI = 4C + 3B$$
$$X(2A - 3I) = 4C + 3B \quad , \text{ si } \quad |2A - 3I| \neq 0$$
$$X = (4C + 3B)(2A - 3I)^{-1} \quad \text{solución.}$$

Operaciones :

$$4C + 3B = \begin{bmatrix} 19 & -2 & 10 \\ 9 & -11 & 9 \\ 20 & 6 & -15 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3I = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 4 & -9 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad |2A - 3I| = 55$$

$$(2A - 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 37/55 & -16/55 & 2/55 \\ 36/55 & -23/55 & -4/55 \\ 4/5 & -2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$X = (4C + 3B)(2A - 3I)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -2 & 10 \\ 9 & -11 & 9 \\ 20 & 6 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37/55 & -16/55 & 2/55 \\ 36/55 & -23/55 & -4/55 \\ 4/5 & -2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1071/55 & -478/55 & -64/55 \\ 333/55 & -89/55 & -37/55 \\ 296/55 & -128/55 & 181/55 \end{bmatrix} \quad \text{solución.}$$

Comprobamos la solución :

$$2\begin{bmatrix} 1071/55 & -478/55 & -64/55 \\ 333/55 & -89/55 & -37/55 \\ 296/55 & -128/55 & 181/55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4093/55 & -1874/55 & 28/55 \\ 1659/55 & -707/55 & 111/55 \\ 1328/55 & -384/55 & -117/55 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} 1071/55 & -478/55 & -64/55 \\ 333/55 & -89/55 & -37/55 \\ 296/55 & -128/55 & 181/55 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}. =$$

$$= \begin{bmatrix} 4093/55 & -1874/55 & 28/55 \\ 1659/55 & -707/55 & 111/55 \\ 1328/55 & -384/55 & -117/55 \end{bmatrix}$$

Partición de matrices

Comentario

Uno de los motivos para particionar una matriz es realizar más fácilmente productos de matrices con muchas filas y columnas; sin embargo, con uso del computador o de las calculadoras inteligentes, ya no es tan necesario.

Nuestro propósito ideal es utilizar la Partición de Matrices para calcular la inversa de una matriz.

Partición de matrices:

Concepto: Es dividir una matriz en sub-matrices, mediante segmentos horizontales y (o) verticales. Generalmente, un segmento vertical y uno horizontal, nuestra necesidad.

Ejemplo 1.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 5 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 3 & 4 & 3 \\ \hline 3 & -1 & -5 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

sub-matrices:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ \hline 3 & 5 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline B_{31} & B_{32} \end{array}\right]$$

sub-matrices:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{32} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

sub-matrices:

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad C_{12} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Producto de matrices, utilizando partición

Dadas dos matrices A y B, con producto conformable $A \cdot B$ y sus respectivas particiones, tenemos que :

$$A \cdot B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

La partición que hemos tomado es sólo un ejemplo, que lo desarrollamos así, por el manejo que vamos a dar a la partición de matrices.

Ejemplo: Utilizando una partición igual a la teoría, calcular el producto $A \cdot B = ?$ siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & -4 \\ 8 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Sólo vamos a comprobar que las Particiones seleccionadas en las matrices A y B son Conformables, esto significa que los productos y las sumas efectuadas con las sub-matrices de A y B , en la teoría desarrollada, son conformables.

Para esto, sólo manejaremos el orden de cada una de las sub-matrices de A y B en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A_{11} & B_{11} & + & A_{12} & B_{21} \\ (2x2) & (2x2) & + & (2x3) & (3x2) \\ \multicolumn{2}{c}{(2x2)} & + & \multicolumn{2}{c}{(2x2)} \\ \multicolumn{5}{c}{(2x2)} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} A_{11} & B_{12} & + & A_{12} & B_{22} \\ (2x2) & (2x2) & + & (2x3) & (3x2) \\ \multicolumn{2}{c}{(2x2)} & + & \multicolumn{2}{c}{(2x2)} \\ \multicolumn{5}{c}{(2x2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A_{21} & B_{11} & + & A_{22} & B_{21} \\ (2x2) & (2x2) & + & (2x3) & (3x2) \\ \multicolumn{2}{c}{(2x2)} & + & \multicolumn{2}{c}{(2x2)} \\ \multicolumn{5}{c}{(2x2)} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} A_{21} & B_{12} & + & A_{22} & B_{22} \\ (2x2) & (2x2) & + & (2x3) & (3x2) \\ \multicolumn{2}{c}{(2x2)} & + & \multicolumn{2}{c}{(2x2)} \\ \multicolumn{5}{c}{(2x2)} \end{array}$$

Se deja al lector realizar las operaciones.

Inversa de una matriz por Partición

Dada la matriz A y su respectiva Partición, tenemos que:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

Supongamos que la inversa de la matriz A, es la matriz B , por lo tanto,

$$\text{(i)} \quad A \cdot B = I \qquad y \qquad \text{(ii)} \quad B \cdot A = I$$

Utilizando la parte (i) y la siguiente partición, tenemos que:

$$A \cdot B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} & A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} \\ \hline A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} & A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & I \end{array}\right]$$

Sistema de Ecuaciones Matriciales Lineales, resultante de la igualdad de las matrices con esas particiones:

$$(1) \quad A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = I \qquad (2) \quad A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} = O$$

$$(3) \quad A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} = O \qquad (4) \quad A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} = I$$

despejando $B_{12} = ?$ de (2) $A_{11} B_{12} = O - A_{12} B_{22}$

$$= - A_{12} B_{22}$$

$$B_{12} = (A_{11})^{-1} (- A_{12} B_{22})$$

$$= - (A_{11})^{-1} A_{12} B_{22} \quad (5)$$

remplazando (5) en (4), obtenemos:

$$A_{21}[-(A_{11})^{-1}A_{12}B_{22}] + A_{22}B_{22} = I$$
$$A_{22}B_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12}B_{22} = I$$
$$[A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12}]B_{22} = I$$

$$B_{22} = [A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12}]^{-1} \qquad (6)$$

remplazando (6) en (5), obtenemos:

$$B_{12} = -(A_{11})^{-1}A_{12}[A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12}]^{-1} \qquad (7)$$

despejando $B_{21} = ?$ de (3), obtenemos:

$$B_{21} = -(A_{22})^{-1}A_{21}B_{11} \qquad (8)$$

remplazando (8) en (1), obtenemos:

$$A_{11}B_{11} - A_{12}(A_{22})^{-1}A_{21}B_{11} = I$$
$$[A_{11} - A_{12}(A_{22})^{-1}A_{21}]B_{11} = I$$

$$B_{11} = [A_{11} - A_{12}(A_{22})^{-1}A_{21}]^{-1} \qquad (9)$$

remplazando (9) en (8), obtenemos:

$$B_{21} = -(A_{22})^{-1}A_{21}[A_{11} - A_{12}(A_{22})^{-1}A_{21}]^{-1} \qquad (10)$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} [A_{11} - A_{12}(A_{22})^{-1}A_{21}]^{-1} & -(A_{11})^{-1}A_{12}[A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12}]^{-1} \\ \hline -(A_{22})^{-1}A_{21}[A_{11} - A_{12}(A_{22})^{-1}A_{21}]^{-1} & [A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12}]^{-1} \end{array}\right]$$

La fórmula mostrada, se supone que las sub-matrices A_{11} y A_{22}tienen determinante diferente de cero.

Ejemplo 1.

Vamos a seleccionar una matriz A, que satisfaga la fórmula.

Sea A la siguiente matriz:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Las sub-matrices de A son:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_{11})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad (A_{22})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_{22})^{-1} A_{21} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}\,(A_{22})^{-1}\;A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} - A_{12}\,(A_{22})^{-1}\;A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{11} - A_{12}\,(A_{22})^{-1}\,A_{21}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -5/2 \end{bmatrix} \quad (1\,;1)$$

$$-(A_{22})^{-1}\;A_{21}\;[A_{11} - A_{12}\;(A_{22})^{-1}\;A_{21}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -5/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/4 & -7/4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (2\,;\,1)$$

$$(A_{11})^{-1}\;A_{12} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}\,(A_{11})^{-1}\;A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1} A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1} A_{12}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5/2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2\,;2)$$

$$-(A_{11})^{-1} A_{12} [A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1} A_{12}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5/2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (1;2)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & -5/2 & 1 & -2 \\ 5/4 & -7/4 & 1 & -5/2 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Citamos un ejemplo 2, donde no es posible aplicar la fórmula que mostramos para calcular la inversa de la matriz A.

Ejemplo 2. Dada la matriz D se pide calcular su inversa por partición

$$D = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Las sub-matrices de D son :

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad D_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Las sub-matrices D_{11} y D_{22} no son invertibles, por lo tanto, debemos mostrar una nueva fórmula para calcular la inversa de la matriz D utilizando partición.

Supongamos que la inversa de la matriz D es la matriz X , entonces:

$$D \cdot X = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D_{11} X_{11} + D_{12} X_{21} & D_{11} X_{12} + D_{12} X_{22} \\ D_{21} X_{11} + D_{22} X_{21} & D_{21} X_{12} + D_{22} X_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

Sistema de Ecuaciones Matriciales Lineales, resultante de la igualdad de las matrices con dichas particiones:

(1) $D_{11} X_{11} + D_{12} X_{21} = I$ (2) $D_{11} X_{12} + D_{12} X_{22} = O$

(3) $D_{21} X_{11} + D_{22} X_{21} = O$ (4) $D_{21} X_{12} + D_{22} X_{22} = I$

despejando $X_{11} = ?$ de (3) $D_{21} X_{11} = O - D_{22} X_{21}$

$$= - D_{22} X_{21}$$

$$X_{11} = (D_{21})^{-1} (- D_{22} X_{21})$$

$$= - (D_{21})^{-1} D_{22} X_{21} \quad (5)$$

remplazando (5) en (1), obtenemos:

$$D_{11} [- (D_{21})^{-1} D_{22} X_{21}] + D_{12} X_{21} = I$$

$$D_{12} X_{21} - D_{11} (D_{21})^{-1} D_{22} X_{21} = I$$

$$[D_{12} - D_{11} (D_{21})^{-1} D_{22}] X_{21} = I$$

$$X_{21} = [D_{12} - D_{11} (D_{21})^{-1} D_{22}]^{-1} \quad (6)$$

remplazando (6) en (5), obtenemos:

$$X_{11} = - (D_{21})^{-1} D_{22} [D_{12} - D_{11} (D_{21})^{-1} D_{22}]^{-1} \qquad (7)$$

despejando $X_{22} = ?$ de (2), obtenemos:

$$X_{22} = - (D_{12})^{-1} D_{11} X_{12} \quad (8)$$

remplazando (8) en (4), obtenemos:

$$D_{21} X_{12} - D_{22} (D_{12})^{-1} D_{11} X_{12} = I$$

$$[D_{21} - D_{22} (D_{12})^{-1} D_{11}] X_{12} = I$$

$$X_{12} = [D_{21} - D_{22} (D_{12})^{-1} D_{11}]^{-1} \qquad (9)$$

remplazando (9) en (8), obtenemos:

$$X_{12} = - (D_{12})^{-1} D_{11} [D_{21} - D_{22} (D_{12})^{-1} D_{11}]^{-1} \qquad (10)$$

$$D^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} -(D_{21})^{-1} D_{22} [D_{12} - D_{11}(D_{21})^{-1} D_{22}]^{-1} & [D_{21} - D_{22}(D_{12})^{-1} D_{11}]^{-1} \\ \hline [D_{12} - D_{11}(D_{21})^{-1} D_{22}]^{-1} & -(D_{12})^{-1} D_{11} \; [D_{21} - D_{22}(D_{12})^{-1} D_{11}]^{-1} \end{array}\right]$$

Operaciones para calcular la inversa de la matriz D:

$$(D_{12})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (D_{21})^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$(D_{21})^{-1} D_{22} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D_{11}(D_{21})^{-1} D_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14 & -21 \\ -14 & -21 \end{bmatrix}$$

$$D_{12} - D_{11}(D_{21})^{-1} D_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -14 & -21 \\ -14 & -21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

$$[D_{12} - D_{11}(D_{21})^{-1} D_{22}]^{-1} = \begin{bmatrix} 22/59 & -21/59 \\ -15/59 & 17/59 \end{bmatrix} \qquad (2\,;\,1)$$

$$-(D_{21})^{-1} D_{22} \, [D_{12} - D_{11} (D_{21})^{-1} D_{22}]^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22/59 & -21/59 \\ -15/59 & 17/59 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3/19 & 27/59 \\ -1/59 & 9/59 \end{bmatrix} \qquad (1\,;1)$$

$$(D_{12})^{-1} \, D_{11} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 4/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$D_{22} \, (D_{12})^{-1} \, D_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 4/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16/3 & 8/3 \\ 16/3 & 8/3 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} - D_{22} \, (D_{12})^{-1} D_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16/3 & 8/3 \\ 16/3 & 8/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -19/3 & -2/3 \\ -13/3 & -20/3 \end{bmatrix}$$

$$[D_{21} - D_{22} \, (D_{12})^{-1} D_{11}]^{-1} = \begin{bmatrix} -10/59 & 1/59 \\ 13/118 & -19/118 \end{bmatrix} \qquad (1\,;2)$$

$$-(D_{12})^{-1} D_{11} \, [D_{21} - D_{22} \, (D_{12})^{-1} \, D_{11}]^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -4/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10/59 & -1/59 \\ 13/118 & -19/118 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9/118 & 5/118 \\ 9/59 & 5/59 \end{bmatrix} \qquad (2\,;2)$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -3/59 & 27/59 & -10/59 & 1/59 \\ -1/59 & 9/59 & 13/118 & -19/118 \\ 22/59 & -21/59 & 9/118 & 5/118 \\ -15/59 & 17/59 & 9/59 & 5/59 \end{bmatrix}$$

Con las fórmulas obtenidas por partición para calcular la inversa de las matrices A y D comprobamos que no es única, por lo tanto, dado el ejemplo de la matriz, se debe encontrar la fórmula adecuada; esto no contradice el teorema de Unicidad para la inversa de una matriz.

Ejemplo 3. Utilizando partición, calcular la inversa de la siguiente matriz:

$$E = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

De acuerdo con la partición, las sub-matrices de la matriz E son:

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad E_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

donde sólo E_{11} es invertible. Esto significa, que las fórmulas mostradas para la inversa de las matrices A y D no se pueden aplicar a la matriz E, por lo tanto, debemos encontrar una nueva fórmula para calcular la inversa de la matriz E.

Supongamos que la inversa de la matriz E es la matriz H, por lo tanto,

$$\text{(i)} \quad E \cdot H = I \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)} \quad H \cdot E = I$$

$$E \cdot H = \left[\begin{array}{c|c} E_{11} & E_{12} \\ \hline E_{21} & E_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} H_{11} & H_{12} \\ \hline H_{21} & H_{22} \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} E_{11} H_{11} + E_{12} H_{21} & E_{11} H_{12} + E_{12} H_{22} \\ E_{21} H_{11} + E_{22} H_{21} & E_{21} H_{12} + E_{22} H_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

Sistema de Ecuaciones Matriciales Lineales, resultante de la igualdad de las matrices, dadas esas particiones:

$$(1) \quad E_{11} H_{11} + E_{12} H_{21} = I \qquad (2) \quad E_{11} H_{12} + E_{12} H_{22} = O$$

$$(3) \quad E_{21} H_{11} + E_{22} H_{21} = O \qquad (4) \quad E_{21} H_{12} + E_{22} H_{22} = I$$

despejando $H_{11} = ?$ de (1)

$$(1) \quad E_{11} H_{11} = I - E_{12} H_{21}$$

$$H_{11} = (E_{11})^{-1} (I - E_{12} H_{21}) \quad (5)$$

remplazando (5) en (3), obtenemos:

$$E_{21} (E_{11})^{-1} [\, I - E_{12} H_{21}] + E_{22} H_{21} = O$$

$$E_{21} (E_{11})^{-1} + E_{22} H_{21} - E_{21} (E_{11})^{-1} E_{12} H_{21} = O$$

$$H_{21} = -[\, E_{22} - E_{21} (E_{11})^{-1} E_{12}]^{-1} E_{21} (E_{11})^{-1} \qquad (6)$$

remplazando (6) en (3), obtenemos:

$$H_{11} = (E_{11})^{-1} \{\, I + E_{12} [\, E_{22} - E_{21} (E_{11})^{-1} E_{12}]^{-1} E_{21} (E_{11})^{-1} \} \quad (7)$$

despejando $H_{12} = ?$ de (2), obtenemos:

$$H_{12} = -(E_{11})^{-1} E_{12} H_{22} \qquad (8)$$

remplazando (8) en (4), obtenemos:

$$[E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1} E_{12}] H_{22} = I$$

$$H_{12} = [E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1} E_{12}]^{-1} \qquad (9)$$

remplazando (9) en (8), obtenemos:

$$H_{12} = -(E_{11})^{-1} E_{12} [E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1} E_{12}]^{-1} \qquad (10)$$

$$E^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} (E_{11})^{-1}\{I + E_{12}[E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1} E_{12}]^{-1} E_{21}(E_{11})^{-1}\} & -(E_{11})^{-1} E_{12}[E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1} E_{12}]^{-1} \\ \hline -[E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1} E_{12}]^{-1} E_{21}(E_{11})^{-1} & [E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1} E_{12}]^{-1} \end{array}\right]$$

Operaciones :

$$(E_{11})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}(E_{11})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}(E_{11})^{-1} E_{12} = \begin{bmatrix} 3/2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1} E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1}E_{12}]^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 3/2 & -2 \end{bmatrix} \quad (2\,;2)$$

$$-(E_{11})^{-1}E_{12}[E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1}E_{12}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 3/2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad (1;2)$$

$$-[E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1}E_{12}]^{-1}E_{21}(E_{11})^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 3/2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2;1)$$

$$I + E_{12}[E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1}E_{12}]^{-1}E_{21}(E_{11})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/4 & -3/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(E_{11})^{-1}\{I + E_{12}[E_{22} - E_{21}(E_{11})^{-1}E_{12}]^{-1}E_{21}(E_{11})^{-1}\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1;1)$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ -1/4 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ -1/4 & 1/2 & 3/2 & -2 \end{bmatrix}$$

Siempre hemos trabajado las fórmulas para A^{-1} , D^{-1} y E^{-1} con las inversas de ellas a derecha ($A \cdot B = I$, $D \cdot X = I$ y $E \cdot H = I$). En forma similar, se pueden obtener las fórmulas semejantes para A^{-1}, D^{-1} y E^{-1}, trabajando con las inversas de las matrices, a izquierda.

Ejercicios adicionales al capítulo

(1) Calcular la inversa de las siguientes matrices, utilizando la Fórmula (10.1):

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5/2 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2/3 & 3 & -3/2 \\ 4/3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1 & -5/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4/3 & -5 & -2 \\ 2/9 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/2 & -5/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2i & -2 \\ 3 & 4i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3i & -1 \\ -1 & 2 & i \\ 2 & -i & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cosh(x) & \operatorname{senh}(x) \\ \operatorname{senh}(x) & \cosh(x) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \operatorname{sech}(x) & \tanh(x) \\ \tanh(x) & \operatorname{sech}(x) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \coth(x) & \operatorname{csch}(x) \\ \operatorname{csch}(x) & \coth(x) \end{bmatrix}$$

(2) Mostrar que la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} \coth(x) & 1 \\ 1 & \coth(x) \end{bmatrix}$ es

La matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x) & -\operatorname{senh}^2(x) \\ -\operatorname{senh}^2(x) & \frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x) \end{bmatrix}$

(3) Aplicando Transformaciones Elementales sobre las filas, calcular la inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5i & 3 \\ -4 & 2i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3i & -1 \\ -1 & 2 & i \\ 2 & -i & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2-3i & 2 \\ 5 & 2+3i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \\ \operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sec(x) & \tan(x) \\ \tan(x) & \sec(x) \end{bmatrix}$$

(4) Aplicando Operaciones Elementales sobre las columnas, calcular la inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5i & 3 \\ -4 & 2i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3i & -1 \\ -1 & 2 & i \\ 2 & -i & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2-3i & 2 \\ 5 & 2+3i \end{bmatrix}$$

(5) Dadas las matrices A , B , C , D , E y F, resolver para X = ? las siguientes Ecuaciones Matriciales:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ 2 & 1+2i \end{bmatrix} \quad y \quad F = \begin{bmatrix} 2+3i & 5 \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}$$

(i) $3X - 2B = 5C + 3I$

(ii) $2X - 4C + 2A = 2D - 5I - X$

(iii) $5AX + 2B - 4I = 2C + 3D$

(iv) $3XB - 2A + 3I = 3C - 2D$

(v) $4XC + 4B = 5I + 2XD + 3A$

(vi) $2DX + 3A = 3X + 2C - 4CX + 4I$

(vii) $3XA - 5B - 4X = 2C + 4XD + 3I$

(viii) $2BX + 3C - 2I = 4X + 2D - 3XC + 3A$

(ix) $5XA + 2D = 4I - 3X + 2BX + 5C$

(x) $3EX + 2F = 3I - 4A$

(xi) $2XF - 4I + 2B = 3XE + 3C - 2D$

(xii) $4EX + 3B = 5F + 4X - 3I$

Si algunas de las ecuaciones matriciales no tienen solución, adicione una hipótesis, de tal manera que tenga solución. (Mostrar dos soluciones)

(6) Resolver para $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$ las siguientes ecuaciones matriciales:

(i) $$4\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= 4\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

(ii) $$2\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ -3 & 2 & -6\end{bmatrix}$$

$$= 4\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\\ 5 & -1 & -2\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{bmatrix}$$

(iii) $$4\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{bmatrix}^t - 3\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & -2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 4 & 2\\ 5 & -6\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}4 & 5\\ 3 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

(iv) $$3\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & -2\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & -2\\ 5 & 4\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}4 & 5\\ 3 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$= 5\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 4 & 2\\ 5 & -6\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

(v) $$3\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{bmatrix}^t + 2\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 4 & 2\\ 5 & -6\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{bmatrix}^t$$

$$= 4\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{bmatrix}^t - 5\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & -2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$$

(vi) $$4\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}-1 & -3 & 5\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{bmatrix}$$

$$= 3 \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$+ 2 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) Dadas las matrices A , B , C y D con sus respectivas Particiones, calcular los productos A • B = ? y C • D = ?

$$A = \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ 5 & 3 \\ \hline -1 & 6 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cccc} -2 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 2 & 2 & -5 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & -1 & -3 & 4 \\ \hline 4 & 3 & -2 & 1 & 5 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 5 & 2 & -3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$D = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 5 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 5 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & 3 & 3 & -6 & -2 \\ \hline 2 & 5 & -4 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

(8) Calcular la inversa de las siguientes matrices utilizando partición y en caso de necesitar una fórmula diferente a las mostradas en el presente capítulo, trabájela con la inversa a izquierda:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(9) Dadas las matrices X , Y , Z y W , con sus respectivas particiones, calcular sus inversas:

$$X = \left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$Y = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ \hline 3 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$Z = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & -2 \\ \hline 2 & -5 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$W = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ \hline 3 & 2 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

CAPÍTULO 11

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Comentario

En el presente capítulo vamos a estudiar y a resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales utilizando las matrices. Pensamos que estos métodos matriciales, a pesar de ser mucho más sofisticados que los métodos algebraicos tradicionales, son más fáciles.

Sistema de ecuaciones lineales

Definición: Es la representación de dos o más ecuaciones con incógnitas de grado uno, con sus coeficientes y términos independientes o constantes.

Ejemplo 1.

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas :

$$\text{(i)}\quad 3x - 2y = 5 \qquad \text{(ii)}\quad 2x + 5y = -3$$

También, podemos escribirlo, así:

$$\text{(i)}\quad 3x_1 - 2x_2 = 5 \qquad \text{(ii)}\quad 2x_1 + 5x_2 = -3$$

En general:

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\quad 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ &\text{(ii)}\quad 2x_1 + 5x_2 = -3 \end{aligned}$$

Esto es, buscando la forma para trabajar el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, con las matrices.

Representación de un Sistema de Ecuaciones Lineales de n ecuaciones y m incógnitas.

$$\left.\begin{array}{ll}
(i) & a_{11}\ x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ ...\ + a_{1\,m}\, x_m = b_1 \\
(ii) & a_{21}\ x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \ ...\ + a_{2\,m}\, x_m = b_2 \\
(iii) & a_{31}\ x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \ ...\ + a_{3\,m}\, x_m = b_3 \\
 & \qquad\qquad\qquad . \\
 & \qquad\qquad\qquad . \\
 & \qquad\qquad\qquad . \\
(n) & a_{n\,1}\ x_1 \quad a_{n\,2}\, x_2 \quad a_{n\,3}\, x_3 + \ ...\ + a_{n\,m}\, x_m = b_n
\end{array}\right\} (\,I\,)$$

Este es el Sistema de Ecuaciones Lineales (I).

Donde:

a_{ij} son los coeficientes. (reales o complejos)

b_i son los términos independientes. (reales o complejos)

$_1$, x_2, x_3, . . . , x_n son las incógnitas; es decir, los valores a conocer.

Representación matricial del sistema (I):

Forma 1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1\,m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2\,m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3\,m} \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{n\,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3m} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{matriz de los Coeficientes}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{matriz de los Términos Independientes}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{matriz de las Incógnitas}$$

Forma 2.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{n3} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \ldots b_n \end{bmatrix}$$

Nota: En este texto sólo usaremos la Forma 1. de la representación matricial del Sistema de Ecuaciones Lineales (I). Se puede mostrar que la Forma 2. se obtiene de la Forma 1 aplicando transpuesta a cada lado de esa igualdad.

Del ejemplo 1. tenemos que:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ \text{(ii)} & 2x_1 + 5x_2 = -3 \end{array}$$

representación matricial: $$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}}$$

Ecuación Matricial: $A \cdot X = B$

Solución: $X = A^{-1} B$

operaciones: $$X = \begin{bmatrix} 5/19 & 2/19 \\ -2/19 & 3/19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

valores de las incógnitas: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

Pero nos interesa estudiar en este capítulo otros métodos de solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales, cuando esto fuese posible.

Ahora veamos el significado o Interpretación Geométrica de la solución del ejemplo 1.

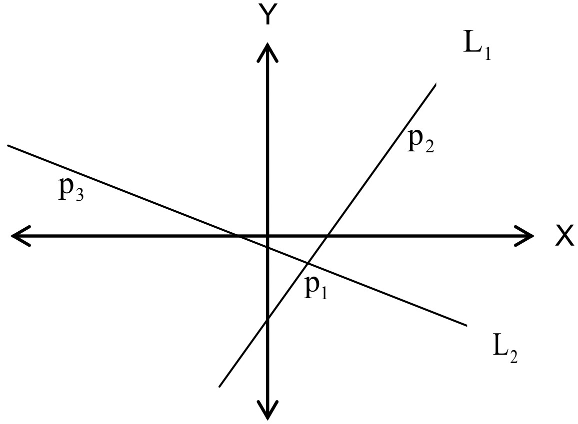
Las Rectas: $L_1 \equiv 3x_1 - 2x_2 = 5$ y $L_2 \equiv 2x_1 + 5x_2 = -3$

Solución: $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

pareja ordenada $(x_1, x_2) = p_1(1, -1)$

El punto p_1 es el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 . Ésta es la Interpretación Geométrica de la solución del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Gráfica: L_1 puntos p_1 y $p_2(3,2)$ y L_2 puntos p_1 y $p_3(-4,1)$



Clases de sistemas de ecuaciones lineales:

(i) Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneos

(ii) Sistemas de Ecuaciones Lineales No-homogéneos

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Definición 1. El sistema de ecuaciones lineales (I) es Homogéneo si todos los términos independientes son ceros, esto es,

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0$$

Definición 2. La ecuación matricial $A \cdot X = B$ representa un sistema de ecuaciones lineales (I) Homogéneo si y sólo si $B = O$.

Nota: Todos los sistemas de ecuaciones lineales Homogéneos tienen la solución trivial (fácil) $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_m = 0$. También, si $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m)$ es una solución del sistema de ecuaciones lineales Homogéneo, donde no todos son ceros, entonces para k real, diferente de cero, se tiene que $(kr_1, kr_2, kr_3, \ldots, kr_m)$,también es solución del sistema, es decir, si se conoce una solución no-trivial, se conocen infinitas soluciones no-triviales.

Conclusión: Todos los sistemas de ecuaciones lineales Homogéneos son Consistentes y tienen solución trivial única o tienen infinitas soluciones no-trivial.

Ejemplo 2. Estudiar el siguiente sistema Homogéneo dos ecuaciones lineales con dos incógnitas :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ \text{(ii)} & 5x_1 - 4x_2 = 0 \end{array}$$

representación natricial: $$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Ecuación Matricial: $A \cdot X = O$

Solución: $X = A^{-1}\, O = O$

Observe que A^{-1} existe, esto significa que la única solución es la trivial, o sea,

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ esto es, los valores de las incógnitas $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$

Interpretación Geométrica:

Las Rectas: $L_1 \equiv 3x_1 + 2x_2 = 0$ y $L_2 \equiv 5x_1 - 4x_2 = 0$

Solución: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

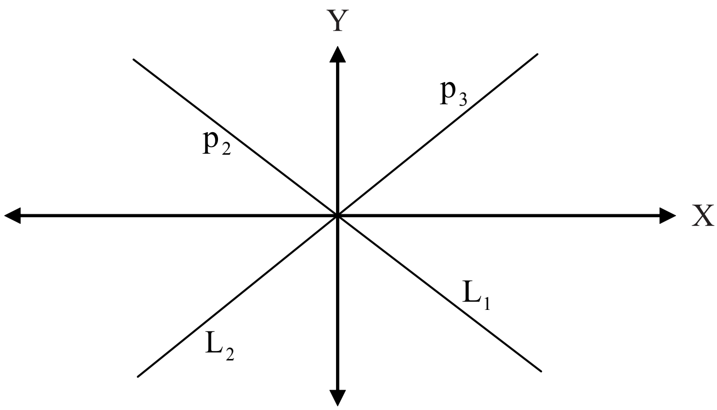
pareja ordenada $(x_1, x_2) = p_1(0, 0)$

El punto P_1 es el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 . Observe que el punto de intersección o solución del sistema es el origen O del plano real.

Gráfica:

Construimos las rectas, así:

L_1 con los puntos p_1 y p_2 (-2,3) y la recta L_2 con los puntos p_1 y p_3 (4,5)



Ejemplo 3. Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales Homogéneo.

$$\begin{aligned} &(i) \quad 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ &(ii) \quad 8x_1 + 12x_2 = 0 \end{aligned}$$

representación matricial: $\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$

Ecuación Matricial: $A \cdot X = O$

la ecuación matricial no tiene solución porque A^{-1} no existe, esto significa que podemos encontrar múltiples soluciones no - trivial, o sea ,

Solución: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, esto es, valores de las incógnitas $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$

Ahora, para k real, diferenta de cero, también son soluciones:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k \\ -2k \end{bmatrix}$$

valores de las incógnitas: $x_1 = 3k$ y $x_2 = -2k$

Interpretación Geométrica :

Las Rectas: $L_1 \equiv 2x_1 + 3x_2 = 0$ y $L_2 \equiv 8x_1 + 12x_2 = 0$

Solución: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

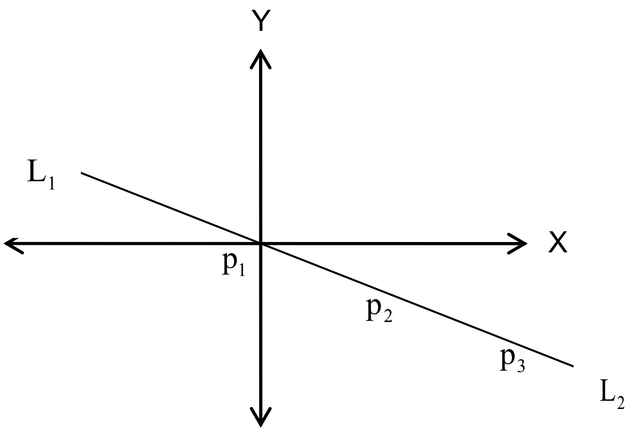
pareja ordenada $(x_1, x_2) = p_1(0, 0)$.

El punto p_1 es el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 . Observe que el punto de intersección o solución de todos los sistemas de ecuaciones lineales Homogéneos es el origen O.

De las múltiples soluciones si $k = 1$ y $k = 2$, los puntos $p_1 (3 , -2)$ y $p_3 (6 , -4)$ son soluciones del sistema. Los puntos p_1 , p_2 y p_3 son Colineales. Ésta es la interpretación geométrica.

Gráfica:

Elaboramos la gráfica con los tres puntos p_1 , p_2 , p_3



Sistemas de ecuaciones lineales no-homogéneos

Definición 1. El sistema de ecuaciones lineales (I) es No-homogéneo, si algún término independiente es diferente de cero, es decir,

$$b_i \neq 0 \text{ para algún } i = 1, 2, 3, . . . , n$$

Definición 2. La ecuación matricial $A \cdot X = B$ representa un sistema de ecuaciones lineales (I) No-homogéneo si y sólo si $B \neq O$ (O matri Nula)

En el ejemplo1. se tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, No-homogéneo.

En la interpretación geométrica analizamos que la solución del sistema es el punto de intersección de las dos rectas $p_1(1,-1)$, el sistema es consistente y tiene solución única.

Ejemplo 4. Estudiar el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales:

$$\text{(i)} \quad 2x_1 + x_2 = 5$$
$$\text{(ii)} \quad 4x_1 + 2x_2 = -1$$

Solución:

representación matricial: $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B}$

Ecuación Matricial: $A \cdot X = B$

La ecuación matricial no tiene solución porque A_{-1} no existe, equivalente a decir que el sistema No – Homogéneo, no tiene solución.

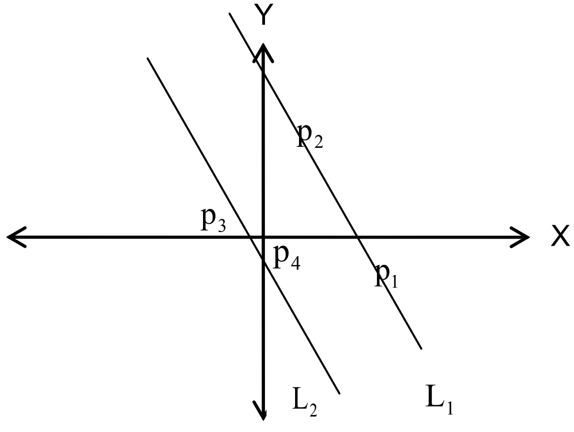
Interpretación Geométrica:

El sistema No-homogéneo de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es inconsistente, o sea, no tiene solución. Esta clase de sistemas se llama Sistemas Indeterminados. El resultado es: Dos Rectas Paralelas (no tienen puntos en común).

Gráfica:

L_1 puntos $p_1(3,-1)$ y $p_2(1,3)$

L_2 puntos $p_3(-1/4,0)$ y $p_4(0,-1/2)$



Ejemplo 5. Estudiemos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, No-homogéneo.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11 \\ \text{(ii)} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ \text{(iii)} & x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{array}$$

Solución:

$$\text{representación matricial:} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B}$$

Ecuación matricial: $A \cdot X = B$

Solución: $X = A^{-1}\ B$; como $\det(A) \neq 0$, la inversa de A existe; por. lo tanto, el sistema es Determinado y tiene solución única.

$$X = \begin{bmatrix} 7/39 & 6/39 & -2/39 \\ -5/39 & 4/39 & 7/39 \\ -1/39 & -7/39 & 17/39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

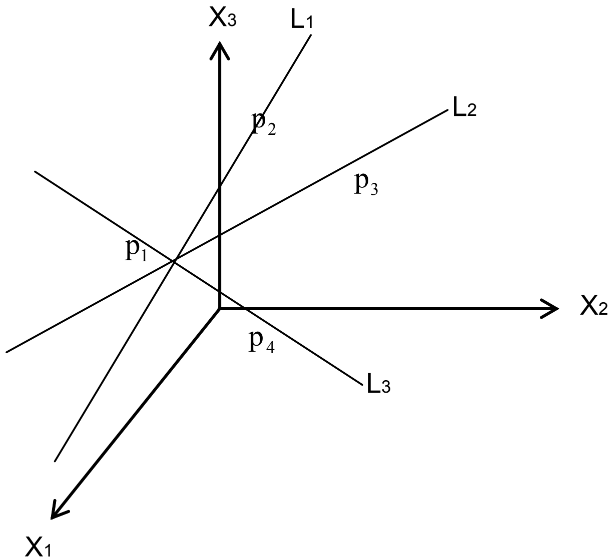
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{por lo tanto, la solución es la tripla } (1, -1, 2)$$

Interpretación Geométrica:

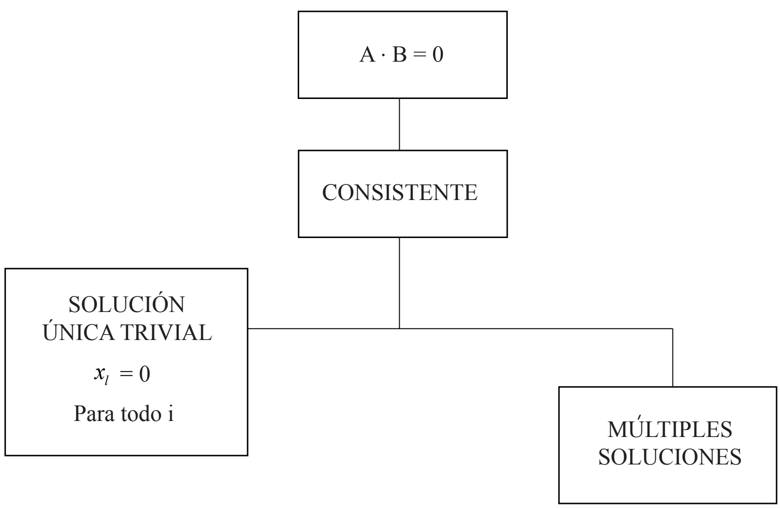
El resultado de la solución son tres Rectas en $R \times R \times R = R^3$ que se interceptan en un solo punto $p_1(1, -1, 2)$.

Gráfica:

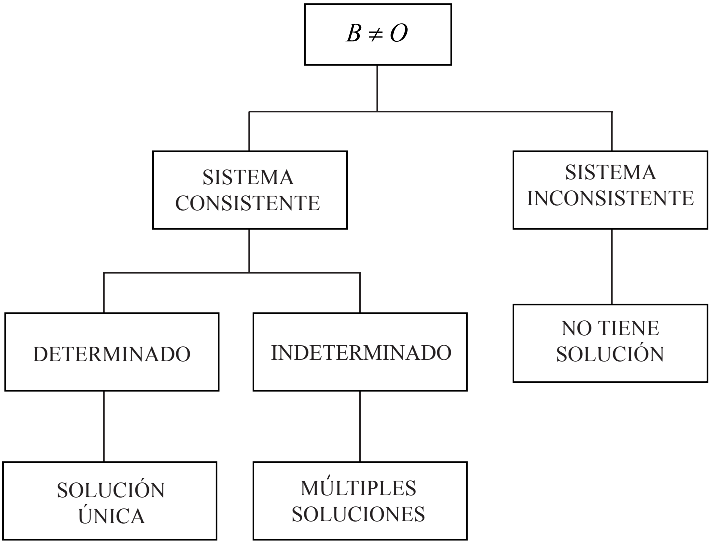
$L_1\ p_1$ y $p_2(1,1,6)$, $L_2\ p_1$ y $p_3(-2,1,2)$ y $L_3\ p_1$ y $p_3(2,1,1/2)$



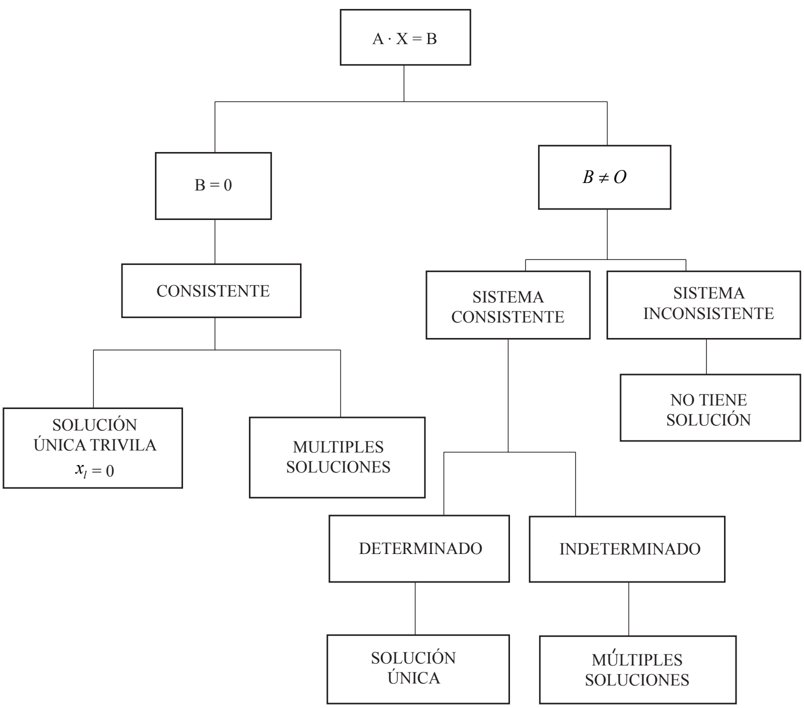
Para Sistemas de Ecuaciones Homogéneos tenemos el siguiente diagrama:



Para Sistemas de Ecuaciones No-Homogéneos tenemos el siguiente diagrama:



Resumiendo los dos diagramas anteriores en uno, tenemos que:



Sistemas de ecuaciones lineales de igual número de ecuaciones y de incógnitas

Planteamos: El Sistema de Ecuaciones Lineales (I) para $n = m$, es decir, n ecuaciones con n incógnitas y lo notaremos como Sistema de Ecuaciones Lineales (II), así:

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
\text{(ii)} & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\
\text{(iii)} & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots + a_{3n} x_n = b_3 \\
 & \vdots \\
\text{(n)} & a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n
\end{array}$$

Representación Matricial del Sistema (II):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Matriz Ampliada o Sistema Ampliado:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Ecuación Matricial: $A \cdot X = B$

Por las múltiples aplicaciones que tiene en muchas asignaturas de los diferentes programas estos Sistemas de Ecuaciones Lineales, sobre todo los que tienen solución única son importantes y nos obliga a estudiarlos y analizarlos de una manera especial. Por consiguiente, vamos a necesitar los siguientes teoremas:

Teorema 11.1 Si un sistema de ecuaciones lineales Homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas tiene Matriz de los Coeficientes No-Singular, entonces el sistema no tiene soluciones no-triviales.

Demostración: Supongamos que el sistema de ecuaciones tiene representación matricial $A \cdot X = O$, donde A es la matriz de los coeficientes, no-singular, entonces la solución de la ecuación matricial es $X = A^{-1} \cdot O = O$ (O matriz Nula), por lo tanto, la única solución es la trivial, o sea, el sistema no tiene soluciones no-trivial.

Teorema 11. 2 Una solución de un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones y n incógnitas de la forma $A \cdot X = B$ es única si y sólo si el sistema Homogéneo de ecuaciones lineales $A \cdot X = O$ no tiene soluciones no-triviales.

Demostración: Supongamos que X_1 y X_2 son solución, entonces $A \cdot X_1 = B$ y $A \cdot X_2 = B$. Además,
$A \cdot X_1 - A \cdot X_2 = B - B = O$; o sea, $A \cdot (X_1 - X_2) = O$ y como la ecuación Homogénea no tiene soluciones no-triviales, entonces
$X_1 - X_2 = O$, es decir, $X_1 = X_2$, por lo tanto la solución es única.

Recíprocamente, supongamos que $Y \neq O$ es una solución de $A \cdot X = O$, por lo tanto $A \cdot Y = O$ y como X_1 es una solución de $A \cdot X_1 = B$,entonces $Y + X_1$ también es solución, puesto que
$A \cdot Y + A \cdot X_1 = O + B = B$; $A \cdot (Y + X_1) = B$ lo cual contradice la unicidad, esto completa la demostración.

Teorema 11.3 Si un Sistema No-Homogéneo de n ecuaciones lineales y n incógnitas, tiene Matriz de los Coeficientes No-Singular, entonces el sistema tiene solución única.

Demostración: Basta trabajar con la ecuación matricial $A \cdot X = B$, donde A es la matriz de los coeficientes, No-singular, la inversa de la matriz A existe , por lo tanto, $X = A^{-1} \cdot B$ es la única solución del sistema.

Métodos para resolver sistemas de n ecuaciones lineales y n incógnitas

Método de triangularización o método de Gauss

Sistema de ecuaciones lineales (II):

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \dots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\
\text{(ii)} & a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \dots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\
\text{(iii)} & a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \dots + a_{3n}\,x_n = b_3 \\
 & \vdots \\
\text{(n)} & a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_3 + \dots + a_{nn}\,x_n = b_n
\end{array}
$$

Representación Matricial:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
. & . & . & \dots & . \\
. & . & . & \dots & . \\
. & . & . & \dots & . \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Matriz Ampliada o Sistema Ampliado:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\
. & . & . & \dots & . & . \\
. & . & . & \dots & . & . \\
. & . & . & \dots & . & . \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right]
$$

Consiste en aplicar transformaciones elementales sobre las filas de la matriz o sistema ampliado hasta conseguir una matriz Triangular Superior o Inferior, en la matriz de los coeficientes. Supongamos que obtenemos una matriz Triangular Superior, en consecuencia tenemos la siguiente matriz ampliada o sistema ampliado, semejante con el original:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & & f_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} & & f_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} & & f_3 \\ . & . & . & \cdots & . & & . \\ . & . & . & \cdots & . & & . \\ . & . & . & \cdots & . & & . \\ 0 & 0 & . & \cdots & c_{nn} & & f_n \end{array}\right]$$

Luego, buscamos la unidad sobre la diagonal, aplicando las Operaciones elementales necesarias, para obtener:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} & g_1 \\ 0 & 1 & d_{23} & \cdots & d_{2n} & g_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & d_{3n} & g_3 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & . & \cdots & 1 & g_n \end{array}\right]$$

Este método no es totalmente matricial, es un método regresivo; es decir, utilizamos en primera instancia herramientas matriciales y luego retornamos a un sistema de ecuaciones lineales semejantes o equivalentes a las originales, el cual resolvemos por la forma tradicional algebraica, así:

Nueva representación matricial del sistema semejante o equivalente con el original.

$$\begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & d_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ . \\ . \\ . \\ g_n \end{bmatrix}$$

Nuevo sistema de ecuaciones lineales semejante con el sistema de ecuaciones lineales (II):

$$\begin{array}{llcl}
(i)' & x_1 + d_{12}\, x_2 + d_{13}\, x_3 + \ldots + d_{1\,n}\, x_n & = & g_1 \\
(ii)' & \qquad x_2 + d_{23}\, x_3 + \ldots + d_{2\,n}\, x_n & = & g_2 \\
(iii)' & \qquad\qquad x_3 + \ldots + d_{3\,n}\, x_n & = & g_3 \\
 & \qquad\qquad\qquad \vdots & & \\
(n)' & \qquad\qquad\qquad\qquad x_n & = & g_n
\end{array}$$

En la última ecuación se obtiene el valor de $x_n = g_n$, luego de abajo hacia arriba se calculan los valores de x_{n-1}, x_{n-2}, ... , x_2 y x_1 utilizando la aritmética tradicional.

Ejemplo 1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales No-homogéneo, por el método de Gauss:

$$(i)\quad 3x - 2y = 5 \qquad (ii)\quad 2x + y = 8$$

Solución:

Representación matricial: $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Matriz ampliada o Sistema ampliado: $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{array}\right]$

(1) Iteración: $f_2 \rightarrow 2\,f_1 + f_2$ $\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 21 \\ 2 & 1 & 8 \end{array}\right]$

(2) Iteración: $f_2 \rightarrow 1/7\ f_2$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \end{array}\right]$

Retornamos a la representación matricial : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

Ahora, al nuevo sistema de ecuaciones lineales, semejante o equivalente con el original:

$$(1)' \quad x \qquad = 3$$

$$(2)' \quad 2x + y = 8$$

$$y = 8 - 2x = 8 - 2(3) = 2 \; ; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ solución del sistema}$$

Ejemplo 2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales No-homogéneo, por el método de Gauss:

$$\begin{aligned} &(i) \quad 2x - 3y + z = -2 \\ &(ii) \quad 3x + y - 4z = 0 \\ &(iii) \quad 4x - 2y + 3z = 5 \end{aligned}$$

Solución:

Representación matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sistema ampliado o Matriz ampliada: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right]$

(1) Iteración: $f_1 \rightarrow 1/2 \; f_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right]$

(2) Iteración: $f_2 \rightarrow -3f_1 + f_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 11/2 & -11/2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right]$

(3) Iteración: $f_3 \rightarrow -4f_1 + f_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 11/2 & -11/2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right]$

(4) Iteración: $f_2 \rightarrow 2/11 f_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 6/11 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right]$

(5) Iteración: $f_3 \rightarrow -4f_2 + f_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 6/11 \\ 0 & 0 & 5 & 75/11 \end{array}\right]$

(6) Iteración: $f_3 \rightarrow 1/5\ f_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 6/11 \\ 0 & 0 & 1 & 15/11 \end{array}\right]$

Retornamos a la nueva representación matricial, equivalente o semejante a la original:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6/11 \\ 15/11 \end{bmatrix}$$

Ahora, al nuevo sistema de ecuaciones lineales semejante al original:

$$\text{(i)'} \quad x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -1$$

$$\text{(ii)'} \quad y - z = \frac{6}{11}$$

$$\text{(iii)'} \quad z = \frac{15}{11}$$

$$\text{(i)'} \quad x = -1 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}y = \frac{13}{11}$$

$$\text{(ii)'} \quad y = \frac{6}{11} + \frac{15}{11} = \frac{21}{11}$$

Para recordar nuevamente las matrices, escribimos la solución del sistema, así:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/11 \\ 21/11 \\ 15/11 \end{bmatrix} \text{ solución del sistema}$$

Método de diagonalización o método de Jordan

Este método es puramente matricial, esto significa que, con las herramientas que tratamos en este texto, encontramos la solución del sistema de ecuaciones lineales en forma directa. Consiste en aplicar transformaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada o sistema ampliado hasta conseguir en la matriz de los coeficientes una matriz Diagonal, luego buscamos la unidad sobre la diagonal, es decir, obtenemos la matriz Identidad y de allí, la solución directa del sistema, así:

Del Sistema de Ecuaciones Lineales(II)escribimos la representación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistema Ampliado o Matriz Ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Aplicando Operaciones elementales sobre las filas del sistema ampliado, obtenemos:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & & f_1 \\ 0 & c_{22} & 0 & \ldots & 0 & & f_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \ldots & 0 & & f_3 \\ . & . & . & \ldots & . & & . \\ . & . & . & \ldots & . & & . \\ . & . & . & \ldots & . & & . \\ 0 & 0 & . & \ldots & c_{n\,n} & & f_n \end{array}\right]$$

Ahora, obtenemos la unidad sobre la diagonal:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & d_3 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & . & \ldots & 1 & d_n \end{array}\right]$$

Nueva ecuación matricial semejante a la original:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Solución del sistema}: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Vamos a resolver el ejemplo 2. por el método de Jordan, para esto, retomamos el ejercicio a partir de la sexta iteración:

Sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 2x - 3y + z = -2 \\ \text{(ii)} & 3x + y - 4z = 0 \\ \text{(iii)} & 4x - 2y + 3z = 5 \end{array}$$

Representación matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriz ampliada o Sistema ampliado:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Cuando aplicamos la sexta iteración obtuvimos la siguiente matriz o sistema ampliado:

(6) Iteración: $f_3 \rightarrow 1/5\ f_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 6/11 \\ 0 & 0 & 1 & 15/11 \end{array}\right]$

Ahora, buscamos los ceros por encima de la diagonal:

(7) Iteración: $f_2 \rightarrow f_2 + f_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 21/11 \\ 0 & 0 & 1 & 15/11 \end{array}\right]$

(8) Iteración: $f_1 \rightarrow -\frac{1}{2} f_3 + f_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -37/22 \\ 0 & 1 & 0 & 21/11 \\ 0 & 0 & 1 & 15/11 \end{array}\right]$

(9) Iteración: $f_1 \rightarrow \frac{3}{2} f_2 + f_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 13/11 \\ 0 & 1 & 0 & 21/11 \\ 0 & 0 & 1 & 15/11 \end{array}\right]$

Ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/11 \\ 21/11 \\ 15/11 \end{bmatrix}$$

$$\text{solución del sistema}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/11 \\ 21/11 \\ 15/11 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales indicando la clase de sistema y el método utilizado para resolverlo:

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{2}p + \frac{5}{2}m - n = 0$$

$$\text{(ii)} \quad 2n + \frac{3}{2}m + \frac{5}{2}p + 3 = 0$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{2}{3}m - \frac{1}{3} - p - n = 0$$

Solución: Ordenamos el sistema de ecuaciones lineales para poder aplicar la teoría estudiada en el presente capítulo:

$$
\begin{aligned}
&(i) && n - \frac{5}{2}m - \frac{1}{2}p = 0\\
&(ii) && 2n + \frac{3}{2}m + \frac{5}{2}p = -3\\
&(iii) && -n + \frac{2}{3}m - p = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Éste es un sistema de ecuaciones lineales No-homogéneo.

Solución por el Método de Diagonalización o Método de Jordan.

Representación matricial:

$$
\begin{bmatrix} 1 & -5/2 & -1/2 \\ 2 & 3/2 & 5/2 \\ -1 & 2/3 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} n \\ m \\ p \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1/3 \end{bmatrix}
$$

Sistema ampliado: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/2 & -1/2 & 0 \\ 2 & 3/2 & 5/2 & -3 \\ -1 & 2/3 & -1 & 1/3 \end{array}\right]$

(1) Iteración: $f_2 \rightarrow -2\ f_1 + f_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 13/2 & 7/2 & -3 \\ -1 & 2/3 & -1 & 1/3 \end{array}\right]$

(2) Iteración: $f_3 \rightarrow f_1 + f_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 13/2 & 7/2 & -3 \\ 0 & -11/6 & -3/2 & 1/3 \end{array}\right]$

(3) Iteración: $f_2 \rightarrow 2/13\ f_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 7/13 & -6/13 \\ 0 & -11/6 & -3/2 & 1/3 \end{array}\right]$

(4) Iteración: $f_3 \rightarrow 11/6\ f_2 + f_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 7/13 & -6/13 \\ 0 & 0 & -20/39 & -20/39 \end{array}\right]$

(5) Iteración: $f_3 \rightarrow -39/20\ f_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 7/13 & -6/13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

(6) Iteración: $f_2 \rightarrow -7/13\ f_1 + f_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

(7) Iteración: $f_1 \rightarrow 1/2\ f_3 + f_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

(8) Iteración : $f_1 \rightarrow 5/2\ f_2 + f_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ m \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

solución del sistema : $\begin{bmatrix} n \\ m \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejercicios adicionales al capítulo

(1) Analizar y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, indicando la clase de sistema, método para resolverlo y su interpretación geométrica:

(a) $3x + 5y = 0$ $\quad 2x + 5y = 0$

(b) $4x - 3y = 0$ $\quad 2 - \frac{3}{2}y = 0$

(c) $2x - 3y = 2$ $\quad x + 5y = -1$

(d) $\begin{aligned} 5x - 2y &= -1 \\ \frac{5}{2}x - y &= 4 \end{aligned}$ (e) $\begin{aligned} \frac{2}{3}x - 3y + \frac{3}{2}z &= 0 \\ \frac{4}{3}x - y + z &= 0 \\ x - 5y + \frac{1}{2}z &= 0 \end{aligned}$ (f) $\begin{aligned} \frac{4}{3}x - 5y - 2z &= 4 \\ \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= -2 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}z &= 3 \end{aligned}$

(g) $\begin{aligned} \frac{3}{2}x - y - 2z &= 0 \\ 2x - 5y + 3z &= 0 \\ x - \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}z &= 0 \end{aligned}$ (h) $\begin{aligned} 2x - y - z &= 2 \\ 3x + 2y - 4z &= 5 \\ x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z &= 1 \end{aligned}$

(2) Mostrar que si un sistema Homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas no tiene soluciones no-triviales, entonces la matriz de los coeficientes es no-singular. (Recíproco del teorema 11.1)

Ayuda: Basta mostrar que al diagonalizar la matriz de los coeficientes, todas las componentes de la diagonal son diferentes de cero.

(3) Mostrar que si un sistema no-Homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución única, entonces la matriz de los coeficientes es no-singular. (Recíproco del teorema 11.3).

(4) Resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: ¿solución única?

(i) $\begin{aligned} 2n + p - 3m &= 2 \\ n + p - m &= 1 \\ p + 5m &= 1 \end{aligned}$ (ii) $\begin{aligned} -x + y - 2z + 2w &= 3 \\ -z + 2w &= -1 \\ 4x - y + 3w &= 2 \\ 2x - y + 5w &= -4 \end{aligned}$

(iii) $\begin{aligned} 2x - y + z - 2w &= -3 \\ x - y - z + 2w &= 5 \\ 2x + 2z - w &= 2 \\ -x + y + 2z - w &= 1 \end{aligned}$ (iv) $\begin{aligned} 2b - c + 2d - 2a - 3 &= 0 \\ 4c + 2 + 3a - 2b - d &= 0 \\ -4 + 2c - 5d - 3b + a &= 0 \\ -c - 5a + 4b - 5 - d &= 0 \end{aligned}$

(iv) $\begin{aligned} 2b - c + 2d - 2a - 3 &= 0 \\ 4c + 2 + 3a - 2b - d &= 0 \\ -4 + 2c - 5d - 3b + a &= 0 \\ -c - 5a + 4b - 5 - d &= 0 \end{aligned}$

(5) Resolver los ejercicios anteriores por el método de Jordan.

(6) Resolver los siguientes ejercicios por el método de Jordan. Solución única.

(i)
$$\begin{aligned} 2x - 4y + 3z - 5w &= 3 \\ -4x + 6y + 2z + 2w &= -1 \\ -2x + 4y - 3z + 5w &= 2 \\ 2x - 3y - z + w &= 2 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 4a - 2b + 3c - d &= 2 \\ -2a + 3b - c + 4d &= -1 \\ 5a - 2b + 3c - 3d &= 0 \\ -3a - b - 2c + d &= -3 \end{aligned}$$

(7) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con solución en el campo de los números complejos:

(a)
$$\begin{aligned} 4x - 3y &= -2 + i \\ 2ix - 3iy &= 1 - 4i \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3ix - 4iy &= 18 - 5i \\ 2ix + 5iy &= -11 + 12i \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 3x - 2iy - 4z &= -9 - 3i \\ 2ix - 4y + 5z &= 4 - i \\ 3ix - 3y + 3iz &= -9 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 2n - 2q + 6i - 3ip - 2 &= 0 \\ ip + 17 + 3in - 3q + i &= 0 \\ -2iq + 3p - 8i + 4n - 14 &= 0 \end{aligned}$$

LIBROS CONSULTADOS

MATRICES
APLICACIONES MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN.
Ariel Klerman
Elena K. de Kleiman
Editorial Limusa, MÉXICO 1973

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL Y A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.
John W. Dettman
Libros Mcgraw-Hill, MÉXICO 1974

ALGEBRA LINEAL Y TEORÍA DE MATRICES
Barbolla, Rosa Sanz, Paloma
Prentice Hall 1998 - Primera edición

MATRICES
Frank Ayres
Colección Schaum 1993

COMENTARIO FINAL DEL AUTOR

La elaboración de este texto, es la experiencia de muchos años en la enseñanza del Álgebra de Matrices en la Facultad de Economía Agrícola de La Universidad Tecnológica del Magdalena, posteriormente, Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas en el programa de Economía, dejando ésta de ser tecnológica para tomar su actual estatus de Universidad del Magdalena.

En este libro de consulta el lector observará algunas notaciones propias del autor que no están en desacuerdo con las utilizadas en otros textos del Álgebra de Matrices, por lo tanto el lector o estudiante, debe tener cuidado al resolver los ejercicios.

Eduardo E. Echeverría Rumié
Autor.
Profesor Asociado
UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA.

“Agradecimiento especial a mi hija Kelly Paola Echeverría Madrid, Ingeniera Electrónica de la Universidad del Norte, por su inmensa colaboración en el manejo de la informática”.