INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA DE MATRICES
Y
ALGUNOS TEMAS ESPECIALES

UN LIBRO ELABORADO PARA DOMINAR LAS MATRICES

EDUARDO ENRIQUE ECHEVERRÍA RUMIÉ

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Atlántico
Especialista en Matemáticas Avanzadas de la Universidad Nacional de Colombia
Docente de la Universidad del Magdalena desde Marzo de 1976

Introducción al álgegra de matrices y algunos temas especiales

Edición: Primera - Noviembre de 2009
ISBN: 978-958-746-005-6
Autor: Eduardo Enrique Echeverria Rumié
Diseño y Diagramación: Luis Felipe Marquez, Julio C. Valle N.
Diseño carátula: Andrés Caiaffa Vidal
Ciudad: Santa Marta, D.T.C.H. - Colombia

EDITORIAL
UNIMAGDALENA

UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA
Rector: Ruthber Escorcia Cabellera
Vicerrector de Investigación: Jóse Henry Escobar Acosta
Decano Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas: Jaime Morón Cárdenas
Coordinador de publicaciones y propiedad intelectual (e): Raúl Sarabia-Gómez

ÍNDICE

PRÓLOGO

Hasta hace unos cincuenta años atrás, las matrices sólo se estudiaban en postgrados y en la carrera de Matemáticas y Física. Pero ya la situación ha cambiado totalmente y, por lo tanto, presentamos el texto titulado "Introducción al Álgebra de Matrices y algunos temas especiales"; a consideración de los profesores y estudiantes.

Sabemos que el estudio de las matrices es de vital importancia en los siguientes programas: Economía, Administración de Empresas, Contaduría, Negocios Internacionales y en Ingeniería de Sistemas, Mecánica, Industrial, Eléctrica y Electrónica.

Siempre nos hemos preocupado, en calidad de docentes, por enseñar las matrices como una herramienta muy importante para que el estudiante las maneje y utilice en las diferentes asignaturas de los programas antes mencionados.

A pesar del desarrollo de las computadoras electrónicas y de las calculadoras inteligentes en la solución rápida de muchos temas relacionados con las matrices, es necesario que el estudiante sepa cómo se obtienen esos datos que posteriormente, con conocimientos de causas, ya los puede aplicar en la computadora.

También nos hemos preocupado por presentar una serie de ejercicios resueltos y otros por resolver que no aparecen en los textos de matrices que hemos consultado. Con estos ejercicios, pretendemos que el lector aplique la teoría y se desarrolle cognitivamente.

Para finalizar, queremos formar matricialmente un estudiante analítico con la capacidad de manejar en forma correcta una información y clasificar factores para interrelacionarlos con los componentes de un problema.

Con todo lo anterior mencionado, se desarrollarán de una manera introductoria el Álgebra de Matrices y algunos temas especiales sin perder la formalidad, esto es, presentar teoremas, algunos con su respectiva demostración y de otros sólo su enunciado, ya que el texto es dirigido a estudiantes de pre-grado de las carreras anotadas. Esto, lo afirmamos porque en estos programas las bases matemáticas de álgebra lineal no son suficientes para desarrollar en forma estricta algunos temas relacionados con las matrices.

RESEÑA HISTÓRICA

Los comienzos de las matrices y los determinantes datan del siglo II a. de J.C. aunque hay indicios desde el siglo IV a.de C. Sin embargo, no fue hasta fines del siglo XVII que las ideas reaparecieron y se desarrollaron con fuerza. En Babilonia se estudiaron problemas que involucraban a ecuaciones lineales simultáneas y algunos de éstos son conservados en tabletas de arcilla que permanecieron en el tiempo.

Los chinos, entre los años 200 y 100 a. de C, estuvieron mucho más cerca de las matrices que los babilonios. Verdaderamente, es justo decir que el texto “Nueve Capítulos de Arte Matemático”, escrito durante la Dinastía Han, da el primer ejemplo conocido sobre métodos matriciales. Por ejemplo:

“Hay tres tipos de cereales, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de cereal son contenidas en un fardo de cada tipo?”. La solución que realizaron es muy parecida a la que hoy día se conoce como Eliminación Gaussiana.

Cardan, en “Ars Magna” (1545), da una regla para resolver de dos ecuaciones lineales que llama regla de modo. Resulta que esta regla corresponde en esencia a nuestra conocida Regla de Cramer para la solución de un sistema 2x2. Aunque Cardan daba aún el paso final, no alcanzó la definición de determinante, pero ahora podemos ver que su método conducía a la definición.

La idea de determinante apareció en Japón y Europa al mismo tiempo, aunque Seki, en Japón, lo publicó primero.

En 1683, Seki escribía: “Métodos de Resolución de problemas Disimulados” que contiene métodos matriciales escritos exactamente como en las tablas del método chino descrito con anterioridad. Sin tener alguna palabra que correspondiera a “determinante”, Seki los introdujo y dio métodos generales para calcularlos basados en ejemplos. Usando sus “determinantes” Seki fue capaz de encontrar determinantes de matrices de orden 2x2, 3x3, 4x4 y 5x5 y los aplicó para resolver ecuaciones, pero no sistemas de ecuaciones lineales. Más extraordinario aún es que la aparición del primer determinante en Europa coincidía con el mismo año 1683.

Por los años de 1730, Maclaurin escribió: “Tratados de álgebra” el cual no fue publicado sino hasta 1748, dos años después de su muerte. Este tratado contiene los primeros resultados publicados sobre determinantes probando la regla de Cramer para sistemas de 2x2 y 3x3 e indicando cómo trabajar para sistemas de 4x4. Cramer daba la regla general para sistema de nxn en: “Introducción al análisis de curvas algebraicas” (1750). Esto surgió motivado por encontrar la ecuación de una curva plana, pasando a través de un número dado de puntos. La regla aparece en un apéndice del documento, pero la prueba no.

El término “Determinante” fue introducido por primera vez por Gauss en “Disquisiciones Aritméticas” (1801) mientras se discutían formas cuadráticas. Gauss usó este término porque el determinante determina las propiedades de la forma cuadrática. Sin embargo, este concepto de determinante no era el mismo que conocemos ahora.

Fue Cauchy en 1812 quien usó el término “Determinante” en el sentido moderno. El trabajo realizado por Cauchy es el más completo de las primeras investigaciones sobre determinantes. Él desaprobaba los primeros resultados y daba nuevos, propios sobre Menores.

En este escrito de 1812, por primera vez fue probada la multiplicación de determinantes, aunque en la misma reunión del instituto de Francia, Binet lee un escrito que contenía la prueba del teorema de la multiplicación pero que fue menos satisfactoria que la realizada por Cauchy.

Jacobi publicó tres tratados sobre determinantes en 1841, esto fue de gran importancia, ya que por primera vez la definición de determinante fue hecha en forma algorítmica y las entradas de los determinantes no fueron especificadas. Así, sus resultados fueron aplicados de igual manera bien a casos donde las entradas eran números o ecuaciones. Estos tres escritos de Jacobi hicieron la idea de determinante ampliamente conocido.

Cayley también publicó en 1841 la primera contribución inglesa a la teoría de determinantes. En este escrito, usó dos líneas verticales en ambos lados del arreglo para denotar el determinante, una notación que ahora es común.

El primero en usar el término “Matriz” fue Sylvester en 1850. Sylvester definió matriz como un arreglo rectangular de términos y vio cómo algunas matrices contenían dentro de ellas varios determinantes representados como arreglos cuadrados. Después de dejar América, Sylvester volvió a Inglaterra en 1851, y se formó como abogado. Más tarde junto a Cayley, un abogado como él, compartió sus intereses matemáticos. Cayley rápidamente vio el significado del concepto de matriz y en 1853 había publicado una nota dando, por primera vez, la inversa de una matriz.

Cayley, en 1858, publicó: “Memorias sobre la teoría de matrices” que contiene la primera definición abstracta de matriz. Cayley muestra que los arreglos de coeficiente estudiados tempranamente para formas cuadráticas y para transformaciones lineales son casos especiales de su concepto general. Daba una definición algebraica sobre adición de matrices, multiplicación, multiplicación por un escalar y matriz inversa. Él presentaba una construcción explícita de la inversa de una matriz en términos del determinante. Cayley también probó que, en el caso de matrices de orden (2 x 2), la matriz satisface su ecuación característica propia. Él declaraba que había comprobado el resultado para matrices de orden (3 x 3), indicando su prueba, pero dice:

"Yo no tengo la condición necesaria para llevar adelante el trabajo de probar formalmente el teorema para el caso general de una matriz de cualquier grado."

En 1870, la forma canónica de Jordan aparece en su "Tratado sobre sustituciones y ecuaciones algebraicas" . Aparece en el contexto de una forma canónica para sustituciones lineales sobre un campo finito de orden primo.

Una definición axiomática de determinante fue usado por Weierstrass en sus clases y, después de fallecido, fue publicado en 1903 en la nota "Teoría de determinantes".

En el mismo año también fueron publicados los apuntes de Kronecker sobre determinantes, nuevamente después de su muerte. Con estas dos publicaciones, la teoría moderna de determinantes estaba desarrollada, pero la teoría de matrices tomaba un poco más de tiempo para convertirse en una teoría completamente aceptada.

Un importante texto que abre un espacio para las matrices dentro de las matemáticas fue "Introducción al álgebra lineal" escrito por Bôcher en 1907.

Turnbull y Aitken escribieron textos influyentes en los años 1930, y Mirsky con: "Una introducción al álgebra lineal" en 1955, mostró la Teoría de Matrices estableciéndola como uno de los más importantes tópicos matemáticos para estudiantes de pregrado.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Comentario

Debido a que vamos a estudiar las matrices para los programas mencionados con anterioridad, restringimos su definición.

Definición de Matriz

Es un arreglo ordenado de números (reales, complejos) en forma rectangular.

Notación

Generalmente, notaremos las matrices por medio de letras mayúsculas A,B,C,…,X,Y,Z. Los números que la forman, llamados COMPONENTES de la matriz, encerrados entre corchetes.

Ejemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -6 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Filas

Las filas de una matriz son las formadas por las componentes horizontales y se cuentan de arriba hacia abajo. Las notaremos con la misma letra de la matriz con un sub-índice a la derecha.

De los ejemplos anteriores, tenemos que:

$$A_2 =[\ 4\ -2\ -6\ 0\ 8\ ]\ B_1 =[\ 4\ 6\ 2\ -5]\ C_2 =[\ 0\ 5]$$

$$O_1 =[\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]\ I_2 =[\ 0\ 1\ 0\ ]$$

Nota: En esta notación, se puede presentar alguna confusión con la escritura de matrices especiales, para lo cual estaremos atento para señalarlo.

Columnas

Las columnas de una matriz son las formadas por las componentes verticales y se cuentan de izquierda a derecha. Las notaremos por medio de la misma letra con un súper-índice a la derecha, encerrado en paréntesis.

De los ejemplos anteriores, tenemos que:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad B^{(4)} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$O^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad I^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Orden de una matriz

Es el número de filas y de columnas que forman la matriz. Aclaramos, que no se puede conmutar "columnas y filas", puesto que siempre el primer número corresponde a las filas y el segundo a las columnas.

Con los ejemplos anteriores, escribiremos su notación, así:

Orden de la matriz A = ord (A) = 4x5 se lee: cuatro por cinco

Orden de la matriz B = ord (B) = 3x4

Orden de la matriz C = ord (C) = 2x2 = 2

Orden de la matriz O = ord (O) = 2x4

Orden de la matriz I = ord (I) = 3x3 = 3

Matriz Fila y Matriz Columna

En las notaciones anteriores se pueden apreciar que, en los ejemplos dados de las filas y las columnas, hemos encerrado entre corchetes las componentes, de lo cual se sigue que:

Matriz Fila.

Definición: Es la matriz que tiene una sola fila.

Matriz Columna.

Definición: Es aquella matriz que tiene una sola columna.

Matriz Cuadrada

Definición: Son aquellas matrices cuyo número de filas y de columnas son iguales.

En los ejemplos dados tenemos que las matrices C e I son Matrices Cuadradas y escribimos:

ord (C) = 2x2 = 2 ord (I) = 3x3 = 3

Otros ejemplos:

$$H = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 5 & 8 \\ 9 & -2 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ord (H) = 5x5=5

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

ord (H) = 5x5=5

Ejercicios

(1) Escriba ejemplos de las siguientes matrices, con todas sus componentes diferentes de ceros :

(i) orden 3x5 (ii) orden 1x5 (iii) orden 5 (iv) orden 4x2

(v) orden 4x1 (vi) orden 3x3 (vii) orden 5x6

(2) Complete las siguientes matrices, dada algunas de sus filas y columnas:

(i) $A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ y $A^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(ii) $B_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

y $B^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $C^{(2)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

y $C^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 2